Musterlösung zur 1. Klausur am 02.06.2005

Vorbemerkung zur Punkteverteilung:

1) Da sich die Klausur als etwas zu umfangreich erwiesen hat, wurden die Teilaufgaben 2.c und 4.c als Zusatzaufgaben gewertet. Damit sinkt die Punktzahl der verbleibenden Aufgaben auf 28 Punkte.

2) Die Darstellung der komplexen Zahl aus der Aufgabe 2.a mit kartesischen Koordinaten ist mit den bekannten Funktionswerten der Winkelfunktionen nicht möglich. Deshalb gibt es schon für die richtige Darstellung mit Polarkoordinaten die volle Punktzahl, wer dazu noch die Formel zur Umrechnung aufgeschrieben hatte, bekam einen Zusatzpunkt.

3) Zum besseren Verständnis sind die Lösungswege in dieser Musterlösung etwas ausführlicher kommentiert, als es notwendig gewesen wäre.

Aufgabe 1: **Beschränktheit und Supremum** $3+2+3$ **Punkte**

1.a) Sei A eine von oben und unten beschränkte Menge von reellen Zahlen mit dem Supremum $s = \sup(A)$. Für ein beliebiges $b \in \mathbb{R}$ bilden wir die Menge

$$b \cdot A := \{b \cdot a \mid a \in A\}.$$

Zeigen Sie an Hand der Supremum-Definition, dass $\sup(3 \cdot A) = 3 \cdot \sup(A)$.

Lösung: Das Supremum einer Menge ist die kleinste obere Schranke. Deshalb zeigt man zuerst, dass $3s$ eine obere Schranke von $3 \cdot A$ ist und danach mit einem indirekten Argument, dass es keine kleinere obere Schranke geben kann:

- Sei x ein beliebiges Element aus $3 \cdot A$, dann ist $x = 3a$ für ein $a \in A$ und damit ist $s \geq a$. Aus dieser Ungleichung folgt $3s \geq 3a = x$ ($3s$ ist obere Schranke).

- Angenommen, es gibt eine kleinere obere Schranke $t < 3s$ für $3 \cdot A$, dann wäre $t \geq 3a$ und folglich $\frac{t}{3} \geq a$ für alle $a \in A$. Damit gäbe es mit $\frac{t}{3} < s$ eine kleine obere Schranke von A – Widerspruch!

1.b) Welchen Wert hat $\sup((-3) \cdot A)$? (kurze Begründung reicht)

Lösung: $\sup((-3) \cdot A) = -3 \cdot \inf(A)$. Man zeigt, dass $-3 \cdot \inf(A)$ die kleinste obere Schranke von $(-3) \cdot A$ ist:

- Sei x ein beliebiges Element aus $3 \cdot A$, dann ist $x = 3a$ für ein $a \in A$ und damit ist $\inf(A) \leq a$. Da -3 eine negative Zahl ist, folgt aus dieser Ungleichung $-3 \cdot \inf(A) \geq -3a = x$.

- Angenommen, es gibt eine kleinere obere Schranke $t < -3 \cdot \inf(A)$ für $(-3) \cdot A$, dann ist $-\frac{t}{3} > \inf(A)$ eine größere untere Schranke von A – Widerspruch!

1.c) Es seien a, b, c drei reelle Zahlen und $d = 2 \cdot |a \cdot b \cdot c|$. Wir bezeichnen mit M die Lösungsmenge der Ungleichung

$$(x+a)(x+b)(x+c) \leq d$$

Besitzt die Menge M eine obere und/oder untere Grenze? Es genügt die richtige Antwort mit einer kurzen, aber konkreten Begründung, ohne das (eventuell existierende) Supremum bzw. Infimum direkt anzugeben.

Lösung: Es genügt zu zeigen, dass M von oben beschränkt und von unten nicht beschränkt ist, denn damit gibt es (Vollständigkeitsaxiom! - wichtig zu nennen) ein Supremum, aber kein Infimum. Zur Begründung reicht die Feststellung, dass

$$\lim_{x \to \infty} (x+a)(x+b)(x+c) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to -\infty} (x+a)(x+b)(x+c) = -\infty.$$

Man kann für die Beschränktheit von oben auch eine konkrete Schranke angeben, z.B. $s = 3 \cdot \max\{|a|, |b|, |c|, \sqrt[3]{|d|}\}$, denn für alle $x > s$ gilt

$$(x+a)(x+b)(x+c) > \sqrt[3]{|d|} \cdot \sqrt[3]{|d|} \cdot \sqrt[3]{|d|} = d$$

Damit ist $x \notin M$ und folglich ist s eine obere Schranke für M.

Aufgabe 2: **Polynome** $3+3$ **Punkte** $+2$ **Zusatzpunkte**

2.a) Bestimmen Sie mit dem **Euklidischen Algorithmus** den größten gemeinsamen Teiler der Polynome $p(x) = 2x^3 + x^2 - 4x + 4$ und $q(x) = x^2 - 4$.
Welchen Definitionsbereich und welche Polstellen hat die rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$?

Lösung: Der Euklidische Algorithmus beginnt mit der Polynomdivision

$$(2x^3 + x^2 - 4x + 4) : (x^2 - 4) = 2x + 1 \qquad \text{Rest} \qquad 4x + 8 = 4(x + 2).$$

Es geht weiter mit der Polynomdivision

$$(x^2 - 4) : (x + 2) = x - 2 \qquad \text{Rest} \qquad 0$$

Wegen Rest 0 terminiert der Euklidische Algorithmus mit dem Ergebnis
$ggT(p(x), q(x)) = x + 2$.

Da man für die gekürzte Darstellung der rationalen Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ den Faktor $(x + 2)$ kürzen kann, verbleibt nur die 2 als Nullstelle des Nennerpolynoms. Folglich hat diese Funktion den Definitionsbereich $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ und die Funktion hat an der Stelle 2 einen einfachen Pol.

2.b) Bestimmen Sie mit dem **Newton-Verfahren** das Polynom $p(x)$ vom Grad ≤ 2, dass den folgenden Werteverlauf hat:
$p(-1) = 6, \quad p(0) = 3, \quad p(1) = 4.$

Lösung: Man beginnt mit dem Schema der dividierten Differenzen:

$$\begin{array}{r|ccccc}
-1 & 6 & \searrow & & & \\
 & & & -3 & \searrow & \\
0 & 3 & \begin{smallmatrix}\nearrow\\ \searrow\end{smallmatrix} & & & 2 \\
 & & & 1 & \nearrow & \\
1 & 4 & \nearrow & & &
\end{array}$$

Die Werte $6, -3, 2$ aus der oberen Schräge weden für die Bestimmung des Polynoms $p(x)$ verwendet:

$$p(x) = 6 - 3(x + 1) + 2(x + 1)x = 2x^2 - x + 3$$

c) Es sei $q(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$. Begründen Sie, dass es keine Gerade geben kann, die den Graphen von $q(x)$ an $n+1$ Stellen schneidet (Hinweis: indirekter Beweis).
Lösung: Angenommen der Graph des Polynoms würde eine Gerade mit der Gleichung $y = ax + b$ an $n+1$ Stellen schneiden, dann hätte das Polynom $q(x) - ax - b$ mindestens $n + 1$ Nullstellen und den Grad n. Das ist aber nur möglich, wenn $q(x) - ax - b$ das Nullpolynom mit dem Grad $-\infty$ ist - Widerspruch zu $n \geq 2$.

Aufgabe 3: **Komplexe Zahlen** $3+5$ **Punkte**

3.a) Bestimmen Sie die folgende komplexe Zahl in der kartesischen und der Polardarstellung:

$$z = \frac{(1+\sqrt{3}i)^{10}}{(2-2i)^3}$$

Lösung: Umformung von Zähler und Nenner in Polarform und Anwendung des Satzes von de Moivre:

$$\begin{aligned}
1+\sqrt{3}i &= 2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} \\
2-2i &= \sqrt{8} \cdot e^{\frac{-\pi}{4}i} \\
z &= \frac{(2 \cdot e^{\frac{\pi}{3}i})^{10}}{(\sqrt{8} \cdot e^{\frac{-\pi}{4}i})^3} &&= \frac{2^{10} \cdot e^{\frac{10\pi}{3}i}}{\sqrt{8}^3 \cdot e^{\frac{-3\pi}{4}i}} \\
&= \frac{2^6}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{10\pi}{3}i - \frac{-3\pi}{4}i} &&= 2^5\sqrt{2} \cdot e^{\frac{49\pi}{12}i} \\
&= 2^5\sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{12}i}
\end{aligned}$$

Die Umformung $z = 2^5\sqrt{2}(\cos\frac{1\pi}{12} + i\sin\frac{1\pi}{12})$ brachte noch einen Zusatzpunkt.

3.b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^4 - z^2 + 1 = 0$$

Geben Sie die Lösungen jeweils in kartesischen **und** in Polarkoordinaten an.

Lösung: Man substituiert $x = z^2$ und löst die Gleichung $x^2 - x + 1 = 0$ und erhält die komplexen Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Nach der Rücksubstitution müssen die komplexen Quadratwurzeln aus $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ und $x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ gezogen werden:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } x_1 = e^{\frac{\pi}{3}i}: & z_1 = e^{\frac{\pi}{6}i} & \text{und} & z_2 = e^{\frac{-5\pi}{6}i} \\
\text{für } x_2 = e^{\frac{-\pi}{3}i}: & z_3 = e^{\frac{-\pi}{6}i} & \text{und} & z_4 = e^{\frac{5\pi}{6}i}
\end{array}$$

Umformung in kartesische Koordinaten:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \qquad z_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Aufgabe 4: **Grenzwerte** $3 + 3$ **Punkte** $+4$ **Zusatzpunkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{6x^3 - 3x^2 + 5}{2x^2 - 4x} - 3x \qquad b) \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2}$$

Lösung:

$$
\begin{aligned}
a) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{6x^3 - 3x^2 + 5}{2x^2 - 4x} - 3x &= \lim_{n\to\infty} \frac{6x^3 - 3x^2 + 5 - 6x^3 + 12x^2}{2x^2 - 4x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{9x^2 - 4x + 5}{2x^2 - 4x} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2(9 - 4/x + 5/x^2)}{x^2(2 - 4/x)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}(9 - 4/x + 5/x^2)}{\lim_{n\to\infty}(2 - 4/x)} = \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b) \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 + 2})(\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2})}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(x^2 - 4x) - (x^2 + 2)}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 + 2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(-4x - 2)}{\sqrt{x^2(1 - 4/x)} + \sqrt{x^2(1 + 2/x^2)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x(-4 - 2/x)}{x(\sqrt{(1 - 4/x)} + \sqrt{(1 + 2/x^2)})} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}(-4 - 2/x)}{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{(1 - 4/x)} + \sqrt{(1 + 2/x^2)})} = \frac{-4}{2} = -2
\end{aligned}
$$

4.c) Wie ist die bestimmte Divergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $+\infty$ definiert? Gegeben sei eine Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei der alle Folgeglieder $\neq 0$ sind. Zeigen Sie, dass die durch $b_n = \frac{1}{|a_n|}$ definierte Folge gegen $+\infty$ divergiert!

Lösung: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert gegen ∞, wenn für jedes $K \in \mathbb{R}$ ein n_0 existiert, so dass für jedes $n \geq n_0$ die Ungleichung $a_n > K$ gilt.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und ein beliebiges $K > 0$ gegeben. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{K}$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, gibt es ein n_0, so dass für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon$ gilt. Daraus folgt

$$b_n = \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = K.$$