Mathematik für Informatiker II – SS 2005

Musterlösung zur 2. Klausur vom 18.07.2005

Aufgabe 1: **Grenzwerte** $3 + 3$ **Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-4}{n^2-1}\right)^{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2-1} \cdot \left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n^2-1}\right)^{n^2-1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{3}{n^2-1}\right) \\
&= e^{-3} \cdot 1 = e^{-3}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Die Umformungen in der ersten und zweiten Zeile sind entscheidend für einen sauberen Lösungsansatz. Da die anschließende Anwendung der Produktregel offensichtlich ist, kann die dritte Zeile auch übersprungen werden.

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-3x-1}{e^{-2x}+2x-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{3e^{3x}-3}{-2e^{-2x}+2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{9e^{3x}}{4e^{-2x}} \\
&= \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

Anmerkung: Zu einer vollständigen Lösung gehört ein kurzer Kommentar, dass zweimal die Regel von Bernoulli-l'Hospital angewendet wurde und dass in beiden Fällen die Voraussetzungen (Grenzwert von den Funktionen im Zähler und im Nenner gehen gegen 0) erfüllt waren.

Aufgabe 2: **$\mathcal{O}$-Notation** $2+3+2$ **Punkte**

a) Es seien $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ beliebige Funktionen. Wie ist die Menge $\Omega(f(n))$ definiert und wie kann man die Aussage $g(n) \in \Omega(f(n))$ äquivalent mit einem Quotientenkriterium charakterisieren? Diese Äquivalenz bitte kurz begründen!

Antwort:

$$\Omega(f(n)) = \{g(n) \mid \exists c > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 g(n) \geq c \cdot f(n)\ \}$$

$$g(n) \in \Omega(f(n)) \Longleftrightarrow \text{ Die Folge } \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

Begründung:

$$\forall n \geq n_0 \quad g(n) \geq c \cdot f(n) \Longleftrightarrow \forall n \geq n_0 \quad \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$$

$$\Longleftrightarrow \text{ Die Folge } \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt.}$$

b) Ordnen Sie die folgenden Funktionen aufsteigend nach ihrem asymptotischen Wachtum. Es reicht die richtige Reihenfolge (ohne Begründungen) anzugeben.

$$(\log_2 n)^2 \qquad \log_2 n^2 \qquad \log_2 n! \qquad n \cdot \sqrt{\log_2 n} \qquad \log_8 n \qquad n^{1.5} \qquad 2^{\log_4 n}$$

Lösung: Die richtige Reihenfolge ist

$$\log_8 n \qquad \log_2 n^2 \qquad (\log_2 n)^2 \qquad 2^{\log_4 n} \qquad n \cdot \sqrt{\log_2 n} \qquad \log_2 n! \qquad n^{1.5}$$

Anmerkung: Die ersten zwei Funktionen können auch vertauscht werden (siehe Teil c). Die Bepunktung erfolgte nach der längsten korrekten Teilfolge (Streichung einer minimalen Anzahl von Funktionen, so dass eine korrekt sortierte Folge übrig bleibt).
Bei Länge 4 gab es einen Punkt, bei Länge 5 zwei Punkte und bei Länge 6 zweieinhalb Punkte. Für die volle Punktzahl musste die Gesamtfolge korrekt sein.
Obwohl das in der Aufgabenstellung nicht gefordert war, geben wir hier die entscheidenden Umformungen an, um das Sortierproblem auf einfache Quotientenbetrachtungen reduzieren zu können:

$$\begin{array}{rcll}
\log_2 n^2 & = & 2\log_2 n & \\
\log_2 n! & \in & \Theta(n \log_2 n) & \text{(Fakt aus der Vorlesung)} \\
\log_8 n & = & \frac{1}{3} \cdot \log_2 n & \\
n^{1.5} & = & n \cdot \sqrt{n} & \\
2^{\log_4 n} & = & 4^{\frac{1}{2} \cdot \log_4 n} & = \quad \sqrt{n}
\end{array}$$

c) Welche dieser Funktionen (aus Teil b) haben gleiches Wachstum, d.h. $f(n) \in \Theta(g(n))$? Begründen Sie solche Situationen durch die Angabe von zwei Konstanten c, d, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ und $g(n) \leq d \cdot f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Es sind die Funktionen $f(n) = \log_2 n^2 = 2\log_2 n$ und $g(n) = \log_8 n = \frac{1}{3} \cdot \log_2 n$.

Durch die obigen Umformungen kommt man leicht auf $f(n) \leq 6g(n)$ und $g(n) \leq \frac{1}{6} \cdot f(n)$, aber jede andere Konstante $c \geq 6$ bzw. $d \geq \frac{1}{6}$ wäre auch eine korrekte Antwort.

Aufgabe 3: **Differentialrechnung** $5 + 3$ **Punkte**

a) Eine Baufirma soll ein quaderförmiges Wasserbecken mit Volumen von 600 m^3 herstellen. Das Becken soll einen quadratischen Grundriss (Seitenlänge a Meter) haben und h Meter hoch sein. Zur Kostenkalkulation wird für die Bodenplatte ein Quadratmeterpreis von 150 Euro und für die Seitenwände ein Quadratmeterpreis von 125 Euro angesetzt (die Oberseite ist offen, kostet also nichts).
Bestimmen Sie die optimalen Werte für a und h, um die Gesamtkosten zu minimieren. Vergessen Sie nicht, Ihre Lösung kurz zu kommentieren und das Ergebnis zu begründen.

Lösung: Wir vereinbaren, dass alle Längen in Metern und alle Kosten in Euro angegeben werden und verzichten im Weiteren auf das Mitführen von Maßeinheiten.
Aus der Voraussetzung $V = 600 = a^2 \cdot h$ ergibt sich $h = \frac{600}{a^2}$.

Im nächsten Schritt wird mit Hilfe der Grundfläche a^2 und der Seitenfläche $4 \cdot a \cdot h$ eine Kostenfunktion $f(a)$ aufgestellt und umgeformt:

$$f(a) = 150a^2 + 125 \cdot 4 \cdot a \cdot h = 150a^2 + 500 \cdot a \cdot \frac{600}{a^2} = 150a^2 + \frac{300000}{a}$$

Zur Bestimmung der Minimalkosten muss die Kostenfunktion abgeleitet werden:

$$f'(a) = 300a - \frac{300000}{a^2}.$$

Dann wird die Ableitung auf 0 gesetzt:

$$f'(a) = 0 \Longleftrightarrow 300a = \frac{300000}{a^2} \Longleftrightarrow a^3 = 1000 \Longleftrightarrow a = 10.$$

Zur Überprüfung, ob man für $a = 10$ wirklich ein Minimum erhält, wird die zweite Ableitung gebildet und an der Stelle $a = 10$ ausgewertet:

$$f''(a) = 300 - (-2) \cdot \frac{300000}{a^3} \qquad f''(10) = 300 + 2 \cdot \frac{300000}{1000} = 900$$

Wegen $f''(10) > 0$ hat die Funktion $f(a)$ an der Stelle $a = 10$ ein Minimum. Es ergibt sich eine Höhe von 6 Metern und Gesamtkosten von 45000 Euro.

b) Gegeben seien zwei auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierte Funktionen $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf I differenzierbar sind und die Eigenschaft $g(a) + f(b) = f(a) + g(b)$ haben. Zeigen Sie, dass es ein $c \in (a, b)$ gibt, so dass $f'(c) = g'(c)$ gilt.
Hinweis: Differenzfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$ betrachten.

Lösung: Die Eigenschaft $g(a) + f(b) = f(a) + g(b)$ ist äquivalent zu $f(a) - g(a) = f(b) - g(b)$. Damit gilt $h(a) = h(b)$ und durch Anwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auf die Funktion $h(x)$ gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0$$

Dieses c kann auch zum Beweis der Behauptung verwendet werden, denn wegen $h'(x) = f'(x) - g'(x)$ und $h'(c) = 0$ ist $f'(c) = g'(c)$.

Aufgabe 4: **Integration** $3+4$ **Punkte**

a) Bestimmen Sie das folgende unbestimmte Integral mit partieller Integration.

$$\int x^2 \sin x \; dx$$

Man muss zweimal mit partieller Integration arbeiten, zuerst mit dem Ansatz
$u(x) = x^2$, $v'(x) = \sin x$, $u'(x) = 2x$, $v(x) = -\cos x$, dann mit dem Ansatz
$u(x) = 2x$, $v'(x) = \cos x$, $u'(x) = 2$, $v(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin x \; dx &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x \; dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x - \int 2 \sin x \; dx \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + c
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie das folgende bestimmte Integral mit mit einer geeigneten Substitution. Das Ergebnis muss nicht als numerischer Wert, sondern nur als möglichst einfacher Ausdruck dargestellt werden.

$$\int_0^2 x \left(e^{x^2} + e^{-x^2} \right) \; dx$$

Als Substitution bietet sich hier $t = x^2$ mit $dt = 2x \; dx$ an.
Man muss sich für eine von zwei Lösungsvarianten entscheiden, entweder erst das unbestimmte Integral (einschließlich Rücksubstitution) zu berechnen und danach die Integrationsgrenzen einzusetzen oder gleich das bestimmte Integral durch Substitution der Integrationssgrenzen zu berechnen. Hier wird die erste Variante vorgestellt:

$$\begin{aligned}
\int x \left(e^{x^2} + e^{-x^2} \right) \; dx &= \int \frac{1}{2} \left(e^t + e^{-t} \right) \; dt \\
&= \frac{1}{2} \left(e^t - e^{-t} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{x^2} - e^{-x^2} \right) \\
\int_0^2 x \left(e^{x^2} + e^{-x^2} \right) \; dx &= \frac{1}{2} \left(e^{x^2} - e^{-x^2} \right) \Big|_0^2 \\
&= \frac{e^4}{2} - \frac{e^{-4}}{2}
\end{aligned}$$