Aufgabe 1: **Komplexe Zahlen und Polynome** $3+4+1$ **Punkte**

a) Bestimmen Sie alle komplexe Zahlen z, die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$z \cdot \overline{z} = z + \overline{z} = i \cdot (z - \overline{z})$$

b) Berechnen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms $p(z) = z^4 - z^3 + 3z - 3$. Finden Sie die erste Nullstelle durch Probieren. Geben Sie die komplexen Nullstellen in Polar-**und** kartesischen Koordinaten an.

c) Zerlegen Sie das reelle Polynom $p(x)$ aus b) in ein Produkt von rellen Polynomen vom Grad 1 oder 2.

a) Sei $z = a + ib$, dann

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = 2a = z + \overline{z} = -2b = i(z - \overline{z})$$ 1P

$$\Rightarrow a = -b \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow 2a^2 = 2a$$ 1P

Lösung 1: $a = b = 0$, d.h. $z = 0 + i0$ 1P

Lösung 2: $a = 1$, $b = 1$, d.h. $z = 1 + i$

b) $z_1 = 1$ ist Nullstelle von $p(z)$

Polynomdivision $p(z) = (z-1) \cdot (z^3 + 3)$ 1P

weitere Nullstellen: $z^3 = -3$, d.h. $\sqrt[3]{-3}$ komplex

polar: $-3 = 3 \cdot e^{i\pi}$ 1P

Wurzeln: $z_2 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ $\quad z_3 = \sqrt[3]{3}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{3}\, e^{i\pi}$

$$z_4 = \sqrt[3]{3}\, e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt[3]{3}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$$ 1P

Kartesische Darst.: 1P

$$\begin{cases} z_2 = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{2} + i\, \sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = -\sqrt[3]{3} + i \cdot 0 \\ z_4 = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{2} - i\, \sqrt[3]{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$p(x) = (x-1)(x + \sqrt[3]{3}) \cdot \underbrace{(x - z_2) \cdot (x - z_3)}$$

$$= (x-1)(x + \sqrt[3]{3}) \cdot (x^2 - \sqrt[3]{3}\, x + \sqrt[3]{3}^{\,2})$$ 1P

Aufgabe 2: **Grenzwerte und $\mathcal{O}$-Notation** $1+1+2+4$ **Punkte**

a) Geben Sie die Definition für die Divergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den uneigentlichen Grenzwert ∞ an.

b) Wie ist die Relation $f(n) \in o(g(n))$ für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ definiert?

c) Zu welcher Bedingung ist $f(n) \in o(g(n))$ äquivalent, zu $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$ oder zu $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$? Beweisen Sie die Äquivalenz an Hand der Definitionen!

d) Finden Sie aus der folgenden Familie $\mathcal{F}$ ein Paar (f_i, f_j) mit gleichem Wachstum, d.h. $f_i(n) \in \Theta(f_j(n))$ und $i \neq j$, sowie ein Paar (f_k, f_l), so dass $f_k(n) \in o(f_l(n))$. Begründen Sie Ihre Wahl!

$$\mathcal{F} = \left\{ f_1(n) = \log_2(n \cdot 4^n), \qquad f_2(n) = n^2 \log_4 n, \qquad f_3(n) = n^{1+\log_2 \log_2 n} \right\}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \forall K>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad a_n > K$ 1P

b) $f(n) \in o(g(n)) \iff \forall c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$ 1P

alternativ $\iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

c) $f(n) \in o(g(n)) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$ 0,5P

Begr. $\forall c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad f(n) \leq c \cdot g(n)$

$\iff \forall c>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{c} \leq \frac{g(n)}{f(n)}$

$\iff \forall \underset{\frac{1}{c}}{\overset{\shortparallel}{K}}>0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 \quad K \leq \frac{g(n)}{f(n)}$

$\iff \lim \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$ 1,5P

alternativ: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ und $f(n), g(n) > 0$

$\iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \infty$ 1P weil nicht über Def.

2d) Entscheidend für den Vergleich der Funktionen sind die folgenden Umformungen:

$$f_1(n) = \log_2(n \cdot 4^n) = 2n + \log_2 n$$ 1P

$$f_2(n) = n^2 \log_4 n = \frac{1}{2} n^2 \cdot \log_2 n$$ 1P

$$f_3(n) = n^{1+\log_2 \log_2 n} = n \cdot n^{\log_2 \log_2 n}$$

$$\lim_{n \to \infty} (\log_2 \log_2 n) = \infty$$ 1P

Damit kann man $f_1(n) \in o(f_2(n))$ oder $f_1(n) \in o(f_3(n))$ oder $f_2(n) \in O(f_3(n))$ 0,5 leicht nachweisen:

z.B. $\frac{f_1(n)}{f_2(n)} = \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 + 0 = 0$ 0,5

Durch ein Versehen in der Aufgabenstellung gab es keine zwei Funktionen gleichen Wachstums. Für diese Feststellung gab es einen Zusatzpunkt 1 Zusatzp.

Aufgabe 3: **Extremstellen** 3 + 4 **Punkte**

Gegeben sei eine Strecke s der Länge 1 in der Ebene, die im Koordinatenursprung beginnt und zur positiven x-Achse den Winkel α hat ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

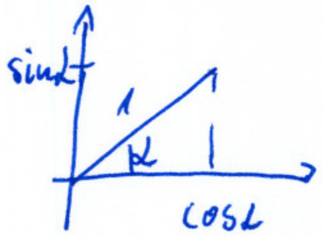
a) Berechnen Sie **mit einem bestimmten Integral** das Volumen V_α des Kegels, der durch Rotation dieser Strecke um die x-Achse entsteht.

Hinweis 1: Dazu muss man diese Strecke als Funktion $f_\alpha(x)$ im Bereich $0 \le x \le\ ?$ beschreiben.

Hinweis 2: Zur Probe und zur Bearbeitung von Teil b) ohne Lösung von a) sehen Sie hier das Zwischenergebnis: $V_\alpha = \frac{\pi}{3} \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha$.

b) Bestimmen Sie den Winkel α, für dem das Volumen des Kegels maximal wird. Sie können diesen Winkel mit Hilfe der arcsin- oder arccos-Funktion ausdrücken.

a)



0,5 $f_\alpha(x) = x \cdot \tan\alpha$

0,5 $0 \le x \le \cos\alpha$ 1P

$$V_\alpha = \int_0^{\cos\alpha} \pi \left(f_\alpha(x)\right)^2 dx = \pi (\tan\alpha)^2 \int_0^{\cos\alpha} x^2\, dx$$ 0,5 0,5 1P

$$= \frac{\pi}{3} \tan\alpha \; x^3 \Big|_0^{\cos\alpha} = \frac{\pi}{3} \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$$ 1P

b) $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\pi}{3}\left(2 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha\right)$$ 1P

$$= \frac{\pi}{3} \sin\alpha \left(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} \sin\alpha \left(3\cos^2\alpha - 1\right)$$ 1P

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0 \text{ oder } \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

↑ nicht in $(0, \frac{\pi}{2})$ 0,5 P

$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $\alpha = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}}$ 1P

Begründung für Max 0,5 P

Aufgabe 4: **Grenzwerte und Integration** 2,5 + 2 + 2,5 **Punkte**

a) Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2 - x\cdot\sin 4x}{1-\cos^2 x}$$

b) und c) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit partieller Integration bzw. mit einer geeigneten Substitution.

$$b)\ \int x^2\cdot\sinh x\ \mathrm{dx} \qquad c)\ \int \sin x\cdot e^{2\cos x}\ \mathrm{dx}$$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x\cdot\sin 4x}{1-\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - x\sin 4x}{\sin^2 x}$ 0,5

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin^2 x} - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \sin 4x}{\sin^2 x}$ 0,5

$= 1 - \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2 \cdot \sin 4x}{4x \cdot \sin^2 x}$ 0,5 1P

$= 1 - 4 = -3$ || alternativ: 2 mal Bernoulli-L'Hospital 1P

b) $\int x^2 \sinh x\, dx = x^2 \cosh x - \int 2x \cosh x\, dx$

$u'(x) = \sinh x \quad v(x) = x^2$ $\qquad u'(x) = \cosh x$, $v(x) = 2x$

$= x^2 \cosh x - 2x \sinh x + \int 2 \sinh x\, dx$

$= (x^2+2)\cosh x - 2x\sinh x + C$ 1P

c) $\int \sin x \, e^{2\cos x} dx$

$t = \cos x \quad dt = -\sin x \, dx$

$= -\int e^{2t} dt =$ 1P

$= -\frac{1}{2} e^{2t} + c$ 1P

$= -\frac{1}{2} e^{2\cos x} + c$ 0,5 P