Lösungshinweise MafI II-Klausur, SoSe 2007

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit | /4+2+4

(a) Betrachten Sie die Folge reeller Zahlen definiert durch $a_0 = 1$ und für $n + 1 > 0$ sei $a_{n+1} = \frac{6(1+a_n)}{7+a_n}$. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

(b) Seien a, b mit $a < b$ zwei verschiedene reelle Konstante. Geben Sie eine konkrete Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die überall stetig aber genau an den Stellen $x = a$ und $x = b$ nicht differenzierbar ist. Kurze Begründung.

(c) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x, \quad \lim_{x\to 0} \sin^2 2x \cot^2 x$$

zu a) (1) Zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist von oben beschränkt durch 2.

Vollst. Induktion:

Induktionsanfang: $a_0 = 1 < 2$.

Induktionsschritt: $a_{n+1} = \frac{6+6a_n}{7+a_n} = 6 - \frac{36}{7+a_n} \overset{\text{I.V.}}{\leq} 6 - \frac{36}{7+2} = 2$

(2) Zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6+6a_n}{a_n(7+a_n)} \geq 1 \iff 0 \geq a_n^2 + a_n - 6$$

Rechte Seite gilt, da $\forall n: a_n \leq 2$.

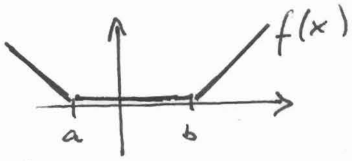
$(1) \wedge (2) \Rightarrow \exists$ Grenzwert $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Für a gilt: $a = \frac{6+6a}{7+a} \Rightarrow a^2 + a - 6 = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$ (2. Lsg $a = -3$ entfällt, da $a_n \geq 0$)

zu b) z.B.:

$$f(x) = \begin{cases} |x-a| & x \leq a \\ 0 & a \leq x \leq b \\ |x-b| & x \geq b \end{cases}$$



In a und b nicht differenzierbar, weil

$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -1 \neq 0 = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Analog für b.

zu c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x+1}\right)^{x+1} \Big/ \left(1 - \frac{2}{x+1}\right) = e^{-2}/1 = \underline{e^{-2}}$

$\lim_{x\to 0} \sin^2 2x \cot^2 x \underset{\text{Add. thm.}}{=} \lim_{x\to 0} (2\sin x \cos x)^2 \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 4 \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{4}}$

alternativ $= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x\right)^2 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \ldots = \underline{\underline{4}}$

Aufgabe 2 Polynome | /4+4+2

(a) Geben Sie ein reelles Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit möglichst geringem Grad an, so dass $p(1) = 3, p'(1) = 2, p''(1) = 4$ und $p^{(3)}(1) = 6$. Beschreiben Sie kurz, wie Sie vorgehen.

(b) Beweisen Sie: Jedes reelle Polynom ungeraden Grades hat mindestens eine reelle Nullstelle. Geben Sie ein Polynom dritten Grades an mit genau einer reellen Nullstelle.

(c) Finden Sie die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 + (1+3i)z + i - 2 = 0$.

zu (a) Wir benutzen Taylor-Formel, Restglied ist 0.

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{p^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k$$

Das ergibt $p(x) = 3 + 2(x-1) + 2(x-1)^2 + (x-1)^3$

$= 2 + x - x^2 + x^3$

zu (b) Mit vollst. Induktion: $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit Grad $2k+1$, $k \in \mathbb{N}$

Ind.anfang: $k=0$ $p(x) = ax+b$ mit $a \neq 0$. $\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$ ist Nst.

Ind.schritt: Sei $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $2k+3$.

Als komplexes (!) Polynom hat $p(x)$ eine komplexe Nst. c.
Wenn $c \in \mathbb{R}$, fertig. Wenn $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist auch die adjungiert komplexe Zahl $\bar{c}$ Nst.

$(x-c) \cdot (x-\bar{c})$ ist reelles Polynom vom Grad 2 und Teiler von $p(x)$.

$p(x) / (x-c)\cdot(x-\bar{c})$ ist reelles Polynom vom Grad $2k+1$ und hat nach Induktionsvoraussetzung reelle Nst., die dann auch reelle Nst. von $p(x)$ ist.

Bsp: $p(x) = (x-1)\cdot(x-i)\cdot(x+i) = (x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$
hat die reelle Nst. $+1$ und weiterhin komplexe Nst $+i$ und $-i$.

zu (c) $z_{1/2} = \frac{-1-3i}{2} \pm \sqrt{\frac{1+6i-9-4i+8}{4}} = \frac{-1-3i}{2} \pm \sqrt{\frac{2i}{4}}$

$\sqrt{2i} = \{1+i, -1-i\}$ erhält man mit $2i = (x+i\cdot y)^2$

$\Rightarrow z_1 = -i$, $z_2 = -1-2i$

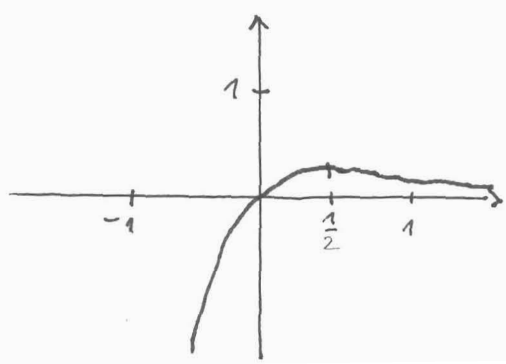
Aufgabe 3 Funktionen /3+7

(a) Eine 2–fach differenzierbare Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften: $f(a) > 0, f'(a) < 0$ und $\forall x > a : \ f''(x) \leq 0$. Argumentieren Sie, dass diese Funktion genau eine Nullstelle hat.

(b) Untersuchen Sie den Funktionsverlauf der Funktion $f(x) = x \cdot e^{-2x}$.

zu (a) $f(a)$ ist positiv, der Anstieg der Tangente in $(a, f(a))$ an den Funktionsgraphen ist negativ, also schneidet die Tangente die x-Achse in einem Pkt. $a' > a$.
Da die erste Ableitung stetig ist und wegen der Rechtskrümmung der Fkt., verläuft der Funktionsgraph unterhalb der Tangente und schneidet somit auch die x-Achse in einem Pkt. $\leq a'$.
Es kann auch keine 2. Nullstelle geben, denn dazu müsste nach der ersten Nullstelle die 1. Ableitung Null werden in einem Punkt b, aber wegen $f'(b) \leq f(a) < 0$ ist dies nicht möglich.

zu (b)
- stetige Funktion mit Definitionsbereich $= \mathbb{R}$, keine Polstellen
- keine Symmetrie, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ x-Achse ist Asymptote
- $f(x) = x \cdot e^{-2x}$
  $f'(x) = e^{-2x}(1 - 2x)$, $f''(x) = e^{-2x}(-4 + 4x)$, $f^{(3)}(x) = e^{-2x}(12 - 8x)$
- $x = 0$ ist einzige Nullstelle
  In $x = \frac{1}{2}$ ist lokales Maximum (auch globales)
  Bei $x = 1$ Wendepunkt mit Übergang von Rechts- in Linkskrümmung
- $f(x)$ ist über $(-\infty, \frac{1}{2}]$ monoton wachsend
  –"– $[\frac{1}{2}, +\infty)$ monoton fallend
  über $(-\infty, +1]$ rechtsgekrümmt
  –"– $[+1, +\infty)$ linksgekrümmt.



Matrikelnummer:

Aufgabe 4 Verschiedenes

/2+3+3+2

(a) Ordnen Sie die folgenden Funktionen aufsteigend bezüglich ihres asymptotischen Wachstuns.

$$n\sqrt[9]{n}, \quad n\log_3 n^4, \quad n^{1.1}\log_2 n, \quad n^{\log_2 n}$$

(b) Bestimmen Sie den Wert von $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx$.

(c) Berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_0^1 e^{-2x}dx$. Welche Regel wenden Sie an? Achten Sie auf Integrationsgrenzen.

(d) Stellen Sie die komplexe Zahl $z = 1-i$ in trigonometrischer und in Exponentialform dar.

zu (a) $n\log_3 n^4 \,,\; n^{1.1}\log_2 n \,,\; n\cdot\sqrt[9]{n} \,,\; n^{\log_2 n}$

zu (b) $\int_1^\infty x^{-\frac{3}{2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx = +2$

Da $\int_1^b x^{-\frac{3}{2}}dx = -2x^{-\frac{1}{2}}\Big|_1^b = \frac{-2}{\sqrt{b}} + 2$

zu (c) Substitutionsmethode $t = -2x$

$\int_0^1 e^{-2x}dx = \int_0^{-2} -\frac{1}{2}e^t dt = -\frac{1}{2}e^t\Big|_0^{-2} = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}$

zu (d) $|z| = \sqrt{2}$

$\varphi = \arg z = -\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$

trigon. Form: $z = \sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Exponentialform: $z = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$