Lösungen Nachklausur MafI II, SoSe 2007
(F. Hoffmann)

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 Konvergenz, O–Notation, Stetigkeit | /4+3+3

(a) Sei $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2+2}{i^3}$ und $b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}$. Untersuchen Sie, ob die Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ bzw. $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergent oder divergent sind. Bestimmen Sie ggf. den Grenzwert. (Tipp: Vergleichskriterium)

(b) Ordnen Sie die folgenden Funktionen in n aufsteigend bezüglich ihres asymptotischen Wachstums! Sehr kurze Begründung!

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 \;;\; n^5 \;;\; \ln n^n \;;\; n\sqrt[4]{n} \;;\; 2^{2\ln n}$$

(c) Diskutieren Sie die Stetigkeit der folgenden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Es sei $f(x) = x^3$ für rationale Argumente und ansonsten $f(x) = 0$. Geben Sie explizit die Mengen der Punkte an, in denen f stetig bzw. nicht stetig ist. Begründung!

zu a) • Wegen $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2+2}{i^3} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ und der Divergenz der harmonischen Reihe ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ divergent.

• Es gilt:

$$0 < b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n+i)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < (n+1)\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$(b_n)_{n\geq 1}$ wird also von oben durch Nullfolge begrenzt, also $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

zu b) • Es gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Theta(n^4)$, $\ln n^n = n\cdot\ln n$, $2^{2\cdot\ln n} = 2^{\ln n\cdot 2} = n^2$

• Potenzen wachsen schneller als Logarithmen; höhere Potenzen wachsen schneller als niedrigere. Also

$$n\cdot\ln n,\; n^{5/4},\; n^2,\; \sum_{i=1}^{n} i^3,\; n^5$$

zu c) Stetigkeit in Punkt $a\in\mathbb{R}$ heißt, dass für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim a_n = a$ auch $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ gilt.

<u>Behauptung</u>: f ist nicht stetig in $a \neq 0$.

<u>Fall 1</u>: $a \in \mathbb{Q}$
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\lim a_n = a$, die nur aus irrationalen Gliedern besteht.
Dann ist $\lim f(a_n) = 0 \neq a^3 = f(a)$.

<u>Fall 2</u>: $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge mit $\lim a_n = a$, die nur aus rationalen Gliedern besteht.
Dann ist $\lim f(a_n) = a^3 \neq 0 = f(a)$.

<u>Behauptung</u>: f ist stetig in $a = 0$.
Für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge.

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 Polynome

/3+2+5

(a) Seien $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{l} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ Polynome vom Grad $k > 0$ bzw. $l > 0$. Diskutieren Sie das asymptotische Wachstum der Folge $(p(n)/q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von den führenden Koeffizienten a_k und b_l der beiden Polynome.

(b) Wie oft schneidet sich der Funktionsgraph eines reellen Polynoms 5. Grades mit einer Geraden mindestens und wie oft höchstens? Kurze Begründung.

(c) Was versteht man unter *Polynominterpolation*? Formulieren Sie die allgemeine Problemstellung.
Finden Sie ein reelles Polynom, das die Stützstellen

$$(-1,-4),\ (0,-1),\ (1,0),\ (2,-1),\ (3,-28)$$

enthält. Welches Verfahren benutzen Sie?

zu a) Durch Ausklammern von $a_k n^k$ im Zähler und $b_l n^l$ im Nenner sieht man, dass das asymptotische Wachstum von $\left(\frac{p(n)}{q(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt wird durch das Wachstum von $\left(\frac{a_k}{b_l}\cdot n^{k-l}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & , k<l \\ \pm\infty & , l<k \quad a_k/b_l \text{ bestimmt Vorzeichen} \\ a_k/b_l & , l=k. \end{cases}$

zu b) Sei $\sum_{i=0}^{5} a_i x^i$ das Polynom und $ax+b$ die Gerade.
Die Lösungen von $\sum_{i=0}^{5} a_i x^i = ax+b$ sind die Nullstellen des reellen Polynoms 5. Grades: $\sum_{i=0}^{5} a_i x^i - ax - b$.
Dieses hat mindestens eine und höchstens 5 reelle Nullstellen.

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 Polynome | /3+2+5

(a) Seien $p(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i, q(x) = \sum_{j=0}^{l} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$ Polynome vom Grad $k > 0$ bzw. $l > 0$. Diskutieren Sie das asymptotische Wachstum der Folge $(p(n)/q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von den führenden Koeffizienten a_k und b_l der beiden Polynome.

(b) Wie oft schneidet sich der Funktionsgraph eines reellen Polynoms 5. Grades mit einer Geraden mindestens und wie oft höchstens? Kurze Begründung.

(c) Was versteht man unter *Polynominterpolation*? Formulieren Sie die allgemeine Problemstellung.
Finden Sie ein reelles Polynom, das die Stützstellen

$$(-1,-4),\quad (0,-1),\quad (1,0),\quad (2,-1),\quad (3,-28)$$

enthält. Welches Verfahren benutzen Sie?

zu c) Unter Polynominterpolation versteht man die Aufgabe, für gegebene Punkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 0,1,\dots,n$ mit paarweise verschiedenen x_i ein Polynom $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ zu finden mit $\forall i: p(x_i) = y_i$.

Mit <u>Newton-Verfahren</u>: ("dividierte Differenzen")

$$\begin{array}{r|cccccccc}
-1 & -4 & & & & & & & \\
 & & 3 & & & & & & \\
0 & -1 & & -1 & & & & & \\
 & & 1 & & 0 & & & & \\
1 & 0 & & -1 & & -1 & & & \\
 & & -1 & & -4 & & & & \\
2 & -1 & & -13 & & & & & \\
 & & -27 & & & & & & \\
3 & -28 & & & & & & &
\end{array}$$

$$p(x) = -4 + 3(x+1) + (-1)(x+1)\cdot x + (-1)(x+1)x(x-1)(x-2)$$
$$= \dots$$
$$= \underline{-x^4 + 2x^3 - 1}$$

Matrikelnummer:

Aufgabe 3 Funktionen, Grenzwerte /4+4+4

(a) Bestimmen Sie die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

links– bzw. rechtsgekrümmt ist.

(b) Sie besitzen 180 m Maschendrahtzaun. Damit sollen Sie 3 der vier Seiten eines rechteckigen Grundstücks einzäunen, so dass dieses eine maximale Fläche hat. Die vierte Seite wird durch Reste der Berliner Mauer begrenzt, bedarf also keines Zaunes. Was sind die Seitenlängen a und b des Rechtecks?

(c) Bestimmen Sie:

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cot(3x), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(e^x - 1)}$$

Zu a) Wir bestimmen Wendepunkte:

$$f'(x) = 2x\cdot e^{-x} + x^2\cdot(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2)$$

$$f''(x) = -e^{-x}(2x-x^2) + e^{-x}(2-2x) = e^{-x}(x^2-4x+2)$$

$f''(x)=0 \leadsto x^2-4x+2=0$ liefert $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}$

Wegen $f''(-4)>0$ ist $f(x)$ in $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ linksgekrümmt

$f''(2)<0$ $\quad (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ rechts –"–

(oder mit 3. Ableitung) $f''(4)>0$ $\quad (2+\sqrt{2}, \infty)$ links –"–

zu b) Fläche $A = a\cdot b$

$= 180a - 2a^2$ mit $b = 180 - 2a$

Fläche maximal falls $A'(a) = 0$. $\quad 180 - 4a = 0$

$A''(a) < 0$ $\quad \leadsto \underline{a = 45} \leadsto \underline{b = 90}$

$a = 45$ liefert für A lokales und globales Maximum.

zu c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\cot(3x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\frac{\cos(3x)}{\sin(3x)}\cdot\frac{3x}{3x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cos 3x}{3\sqrt{x}} = \underline{+\infty}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} \overset{L.H.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x} = \underline{\underline{1}}$$

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 Verschiedenes

/2+3+3

(a) Die komplexen Zahlen mit Betrag ≤ 1 bilden bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation **keinen** Körper. Warum?

(b) Bestimmen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $y = \frac{1}{1+x^2}$ und der x–Achse!

(c) Beweisen Sie, dass $\frac{1}{x \ln a}$ die Ableitung der Funktion $\log_a x$ ist. Welche Regel zum Differenzieren benutzen Sie?

zu a) Diese Grundmenge ist nicht abgeschlossen gegen Addition. $1+1=2$ aber $|2|=2$

zu b) $$\text{Fläche} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left(\arctan(a) - \arctan(-a) \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\pi}$$

zu c) • Für die Ableitung der Umkehrfunktion $g(x)$ für eine Fkt. $f(x)$ gilt

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

• $\ln x$ ist Umkehrfunktion für e^x, also $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, da $(e^x)' = e^x$.

• $$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$