Name: **Vorname:** **Matrikelnr.:**

Tutor: □ Martin □ Hanne □ Alexander
Bioinformatik: □ Ja
Campus Management: □ Ja
Alte Zulassung aus WS: **Dozent:** **Tutor:**

Nachklausur zur Vorlesung

Mathematik für Informatiker III

(Dr. Frank Hoffmann)

Wintersemester 2007/08 **15. April 2008**

Beginn: $16^{\underline{15}}$, Ende: $17^{\underline{45}}$ (90 min)

1.	2.	3.	4.	Σ
/10	/10	/10	/10	/40

Ich bin einverstanden, dass mein Punktergebnis zusammen mit der Matrikelnummer auf einer FU–internen Webseite erscheint: □ **Ja**

Außer Schreibutensilien und einer handbeschriebenen DIN A4 Seite sind keine Hilfsmittel erlaubt!

Auf diesem Klausurbogen ist genügend Platz, um die Lösungen der Aufgaben aufzuschreiben. Bitte geheftet lassen! **Zusätzliche lose Blätter** müssen mit der Matrikelnummer, Namen und Aufgabennummer versehen werden. Auf einem Zusatzblatt jeweils nur eine Aufgabe bearbeiten. Nicht mit Bleistift und nicht mit Rot schreiben. *Der Klausurbogen ist auf jeden Fall abzugeben!*

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Algebraisches I

/6+4

(a) Sei $\mathbb{R}_n[x]$für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ der reelle Vektorraum aller Polynome $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + x_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$, also Polynome mit Grad höchstens n. Darin betrachten wir die Basis $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
Sei $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ die lineare Abbildung, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet.
Bestimmen Sie die zu D, $D^2 = D \circ D$ und allgemein $D^k = D^{k-1} \circ D$ für $k > 0$ bezüglich obiger Basis gehörende Matrizen.
Welche Ränge haben diese Abbildungen? Gibt es zu D eine inverse Abbildung, wenn ja wie sieht sie aus, wenn nein warum nicht?

(b) Überprüfen Sie, ob man folgendes Gleichungssystem mit Hilfe der Cramerschen Regel lösen kann. Wenn es geht, tun Sie es und wenn nicht, (bzw. wenn Sie es nicht wissen) dann versuchen Sie es auf andere Art zu lösen.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & 4z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ 5x & + & y & - & 3z & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 2 Algebraisches II

/8+2

(a) Wir betrachten als lineare Abbildung die Drehung der Ebene bezüglich Koordinatenursprung um einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$. Wie Sie wissen gehört bezüglich Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ dazu die Matrix

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$, für die es reellwertige Eigenwerte gibt. Was sind die Eigenwerte und wie sehen die zugehörigen Eigenräume aus?
Hinweis: Es kommt auf die formale Herleitung an, nicht nur die richtige Antwort!

(b) (Verständnis) Markieren Sie bei den Antworten auf folgende Fragen alle richtigen Antworten mit (+) und alle falschen mit (−) !
Frage: Wenn für einen Nichtnullvektor v und einen Endomorphismus f gilt, dass $f(-v) = \lambda v$, so ist

- $-v$ Eigenvektor zum Eigenwert λ
- v Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$
- $-v$ Eigenvektor zum Eigenwert $-\lambda$

Frage: Wenn λ Eigenwert eines Automorphismus f ist, so ist

- λ ist auch Eigenwert von f^{-1}
- $-\lambda$ ist Eigenwert von f^{-1}
- $\frac{1}{\lambda}$ ist Eigenwert von f^{-1}

Aufgabe 3 Codiertes und endliche Körper

/7+3

(a) Betrachten Sie über $\mathbb{F}_3$ den linearen Code C mit der Generatormatrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wie groß ist $d(C)$? Decodieren Sie die erhaltene Nachricht $(2, 1, 1, 0)$! Schreiben Sie kurz dazu, was Sie tun.

(b) Gibt es für das Element $27 \in \mathbb{Z}_{34}$ ein Element $x \in \mathbb{Z}_{34}$, so dass $x \cdot 27$ kongruent zu 1 modulo 34 ist? Wenn ja, bestimmen Sie es, falls nein geben Sie eine Begründung.

Matrikelnummer:

Aufgabe 4 Zufälliges

/8+2

(a) Sei R eine Kreisscheibe mit Radius 2. Wir wählen bezüglich Gleichverteilung zufällig einen Punkt p in R. Sei X die Zufallsvariable, die den Abstand von p zum Rand von R beschreibt und Y die Zufallsvariable, die dem Punkt p die Fläche des Quadrates Q_p zuordnet, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt von R übereinstimmt und das den Punkt p als Ecke hat.
Bestimmen Sie für beide Zufallsvariablen Erwartungswert und Varianz.

(b) Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert $E(X)$ und Varianz $Var(X)$. Bestimmen Sie die Varianz von $Y = \frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}$.