Mathematik für Informatiker III – WS 2005/06

Musterlösung zur Klausur vom 08.02.06

Anmerkung:

Für die Aufgaben 1 bis 4 gab es 34 Punkte, zusammen mit der Zusatzaufgabe 5 konnte man 40 Punkte erreichen. Um die Klausur zu bestehen sind 50% von 34, also 17 Punkte notwendig.
Die Musterlösung zeigt auch, in welcher Form die Lösungswege kommentiert und begründet werden sollten. Stellenweise werden zum besseren Verständnis auch darüber hinaus gehende Erläuterungen gegeben. Solche Erklärungen sind als Zusatzkommentar gewkennzeichnet.

Aufgabe 1: **Endliche Körper** 8 **Punkte**

a) Stellen Sie eine Tabellen der multiplikationsinversen Elemente im Körper $\mathbb{Z}_5$ auf. Die Werte können auch durch systematisches Probieren bestimmt werden.
b) Bestimmen Sie die vollständige Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems im endlichen Körper $\mathbb{Z}_5$ mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{array}{rrrl} x+ & 2y & & = 2 \\ 2x+ & 3y+ & z & = 2 \\ 3x+ & 3y+ & 3z & = 0 \end{array}$$

Lösung a:

$x \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$	1	2	3	4
x^{-1}	1	3	2	4

Zusatzkommentar: $2^{-1} = 3$ und $3^{-1} = 2$ folgt aus der Kongruenz $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \ (\boldsymbol{mod}\, 5)$

Lösung b:
Schritt 1: Überführung der Matrixdarstellung des Gleichungssystems in obere Dreiecksform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das System hat eine Lösung.

Zusatzkommentar: Für die erste Umformung wird das 3-fache der ersten Zeile zur zweiten addiert und das doppelte der ersten Zeile zur dritten Zeile. Für die zweite Umformung wird das doppelte der zweiten Zeile zur dritten Zeile addiert. Das System hat eine Lösung, weil die Ränge der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix gleich sind (beide gleich 2).

Schritt 2: Bestimmung einer speziellen Lösung:

Man setzt $z = 0$ und löst das System $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{array}\right)$:
$4y = 3 \Longrightarrow y = 3 \cdot 4 \;\boldsymbol{mod}\; 5 = 2$ und $x + 2y = 2 \Longrightarrow x + 4 = 2 \Longrightarrow x = 3$.

Zusatzkommentar: Zur Auflösung der ersten Gleichung muss man beide Seiten der Gleichung mit dem Multiplikationsinversen von 4, also mit 4, multiplizieren. Zur Auflösung der zweiten Gleichung muss man auf beiden Seiten der Gleichung das Additionsinverse von 4, also 1, addieren.

Schritt 3: Bestimmung der Lösungen des homogenen Systems:
Man setzt $z = 1$ und löst das System $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right)$:
$4y = a \Longrightarrow y = 1$ und $x + 2y = 0 \Longrightarrow x + 2 = 0 \Longrightarrow x = 3$.

Zusatzkommentar: Beim homogenen System stehen auf der rechten Seite eigentlich Nullen, aber wegen $z = 1$ schiebt man die dritte Spalte mit negativen Vorzeichen auf die rechte Seite der Gleichung und in $\mathbb{Z}_5$ ist $\quad -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Die Auflösung der Gleichung erfolgt nach dem gleichen Schema wie in Schritt 2.

Schritt 4: Die vollständige Lösungsmenge ist $\quad \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

Aufgabe 2: **Eigenwerte** 10 **Punkte**

Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ habe die folgenden Eigenschaften:

1) Der Vektor $(2, 1, 1)$ liegt im Kern von f.
2) Der Vektor $(2, 0, 1)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 2.
3) Der Basisvektor $\vec{e_3} = (0, 0, 1)$ wird durch f auf den Vektor $(2, 2, 2)$ abgebildet.

a) Bestimmen Sie die Matrix A der Abbildung f bezüglich der Standardbasis.
b) Bestimmen Sie die Matrix $B \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ der Orthogonalprojektion P_U auf den Unterraum $U = Ker(f)$.
c) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren für die folgende Matrix:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Lösung a: Wir fassen die Voraussetzungen zusammen:
Aus 1) folgt $f(2, 1, 1) = (0, 0, 0)$, aus 2) folgt $f(2, 0, 1) = 2 \cdot (2, 0, 1) = (4, 0, 2)$ und aus 3) folgt $f(0, 0, 1) = f(\vec{e_3}) = (2, 2, 2)$. Damit wissen wir schon, dass in der dritten Spalte der Matrix A nur Zweien stehen.

Zusatzkommentar: Für das weitere Vorgehen gibt es zwei Möglichkeiten: Man kann - und das haben viele so gemacht - für die verbleibenden 6 Koeffizienten der Matrix Variable einsetzen, die Bedingungen als Gleichungen formulieren und das Gleichungssystem lösen. Es ist in diesem Fall aber auch leicht zu sehen, wie die Basisvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ als Linearkombination aus den gegebenen Vektoren erzeugt werden können und dann muss man nur noch die Linearität der Abbildung f verwenden.

Die Bilder von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$:

$$\begin{aligned} \vec{e_2} = (2,1,1) - (2,0,1) &\implies f(\vec{e_2}) = (0,0,0) - (4,0,2) = (-4,0,-2) \\ \vec{e_1} = 0,5 \cdot ((2,0,1) - \vec{e_3}) &\implies f(\vec{e_2}) = 0,5 \cdot ((4,0,2) - (2,2,2)) = (1,-1,0) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung b: Offensichtlich hat die Matrix A zwei linear unabhängige Spalten. Damit ist $rg(A) \geq 2$ und nach Dimensionsformel $dim(Ker\ f) = 3 - dim(Im\ f) = 3 - rg(A) \leq 1$. Da wir bereits aus der Aufgabenstellung einen nichttrivalen Vektor aus dem Kern kennen, bildet dieser eine Basis des Kerns.

Achtung: Eine kurze Begründung für $dim(Ker\ f) = 1$ ist zwingend, denn nur unter der Voraussetzung, dass $U = Ker\ f$ nur einen Basisvektor hat, ist das folgende richtig.

Zur Beschreibung der Ortogonalprojektion auf U wird der Basisvektor $\vec{u} = (2,1,1)$ von U normiert.

$$\tilde{u} \quad = \quad \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||} = \frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$$

Die allgemeine Formel für Ortogonalprojektionen wird jetzt für die Vektoren der Standardbasis verwendet:

$$\begin{aligned} P_U(\vec{v}) &= <\vec{v}, \tilde{u}> \cdot \tilde{u} \\ P_U(\vec{e_1}) &= \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \tilde{u} = \left(\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{2}{6}\right) \\ P_U(\vec{e_2}) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tilde{u} = \left(\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \\ P_U(\vec{e_1}) &= \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \tilde{u} = \left(\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Damit hat die Maatrix B der Projektion P_U die folgende Form:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Lösung c: Man beginnt mit der Bestimmung des charakteristischen Polynoms:

$$p_C(\lambda) = det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 5 \\ -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda) - 5(-2) = \lambda^2 - \lambda - 12 + 10 = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte von C:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda_1 = 2 \qquad \lambda_2 = -1$$

Die gesuchten Eigenvektoren liegen im Kern von $\begin{pmatrix} 4-2 & 5 \\ -2 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ und und von $\begin{pmatrix} 4-(-1) & 5 \\ -2 & -3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
Im ersten Fall muss der Eigenvektor (x, y) die Gleichungen $2x+5y = 0$ und $-2x-5y = 0$ erfüllen, im zweiten Fall die Gleichungen $5x + 5y = 0$ und $-2x - 2y = 0$. Daraus erhält man die folgenden Eigenvektoren:

$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ aber auch $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4 \end{pmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist richtig.

Aufgabe 3: Abbildungen und Matrizen 8 **Punkte**

Kreuzen Sie für die folgenden Fragen alle richtigen Aussagen an. Beachten Sie, dass die Fragen auch keine oder mehrere richtige Antworten haben können. Eine Aussage ist natürlich nur dann wahr, wenn sie für alle Abbildungen, Matrizen usw. mit den gegebenen Voraussetzungen wahr ist.

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige lineare Abbildung mit der Matrix A (bezüglich Standardbasis). Aus $det(A) = 1$, folgt:

- ○ f ist diagonalisierbar,
- ⊗ f ist surjektiv,
- ⊗ f ist injektiv,
- ○ f ist eine Orthogonalabbildung,
- ○ das charakteristische Polynom von A hat eine Nullsstelle.

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine beliebige lineare Abbildung mit der Matrix A (bezüglich Standardbasis). Ist f diagonalisierbar, so folgt:

- ○ $det(A) \neq 0$,
- ○ f ist surjektiv,
- ○ f ist injektiv,
- ⊗ f das charakteristische Polynom von A hat eine Nullsstelle.
- ○ f hat n Eigenwerte.

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine beliebige lineare Abbildung mit der Matrix A (bezüglich Standardbasen) und $\vec{b}$ ein beliebiger Vektor aus $\mathbb{R}^m$. Ist $rg(f) = m$ so folgt:

- ⊗ f ist surjektiv,
- ○ f ist injektiv,
- ⊗ das Gleichungssystem $(A|\vec{b})$ hat eine Lösung,
- ○ das Gleichungssystem $(A|\vec{0})$ hat eine eindeutige Lösung,
- ○ es gibt eine Matrix $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$, so dass $BA = E_n$

Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine beliebige lineare Abbildung mit der Matrix A (bezüglich Standardbasen) und $\vec{b}$ ein beliebiger Vektor aus $\mathbb{R}^m$. Ist $rg(f) = n$ so folgt:

- ○ f ist surjektiv,
- ⊗ f ist injektiv,
- ○ das Gleichungssystem $(A|\vec{b})$ hat eine Lösung.
- ⊗ das Gleichungssystem $(A|\vec{0})$ hat eine eindeutige Lösung.
- ⊗ es gibt eine Matrix $B \in M(n \times m, \mathbb{R})$, so dass $BA = E_n$

Zusatzkommentar:
1) Aus der Voraussetzung $det(A) = 1$ (also $\neq 0$) folgt, dass die Abbildung den vollen Rang n hat und deshalb surjektiv ist. Für Endomorphismen über endlichdimensionalen Räumen sind die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent. Man kann das aber auch aus der Dimensionsformel ableiten: $dim(Ker\ f) = n - dim(Im\ f) = n - rg(A) = 0$.
Dass man die anderen Punkte nicht ankreuzen darf, überlegt man sich an geeigneten Gegenbeispielen. Ein Standardbeispiel für Matrizen mit Determinante 1 waren Drehungen. Eine (echte) Drehung der Ebene hat offensichtlich keine Eigenvektoren (denn die Richtung jedes Vektors wird geändert), d.h. es gibt auch keine Eigenwerte, also keine Nullstellen des charakteristischen Polynoms und folglich ist A auch nicht diagonalisierbar. Als Gegenbeispiel für Orthogonalmatrizen, kann man die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ verwenden.

2) Jede diagonalisierbare Abbildung muss auch mindstens einen Eigenwert (d.h. Nullstelle des charakteristischen Polynoms) haben, aber wie das Beispiel der Einheitsmatrix zeigt, kann auch der Fall mit nur einem Eigenwert auftreten. Die quadratische Nullmatrix liefert das Beispiel einer diagonalisierbaren Matrix mit Determinante 0, deren Abbildung also weder injektiv noch surjektiv ist.

3) Die Voraussetzung $rg(f) = m$ impliziert unmittelbar, dass die Abbildung surjektiv ist. Damit liegt jeder Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ im Bild, d.h. jedes Gleichungsystem $(A|\vec{b})$ hat eine Lösung. Ist aber $n > m$, so kann die Abbildung auf keinen Fall injektiv sein $(dim(Ker\ f) = n - dim(Im\ f) = n - m) > 0)$ und damit hat das homogenene Gleichungssystem keine eindeutige Lösung. In diesem Fall kann keine Matrix B mit $BA = E_n$ existieren (es gibt eine mit $AB = E_m$, aber das war hier nicht gefragt).

4) Die Voraussetzung $rg(f) = n$ ist der Komplementärfall zu 3: Wegen $dim(Ker\ f) = n - dim(Im\ f) = n - rg(A) = n - n = 0$ ist f injektiv und damit hat das homogene System eine eindeutige Lösung (alles Null). Die Abbildung zur Matrix B aus dem letzten Punkt erhält man, indem man alle Vektoren aus $Im\ f$ auf ihr eindeutiges Urbild abbildet und alle Vektoren, die nicht in $Im\ f$ liegen, auf den Nullvektor abbildet. Im Fall $m > n$ kann die Abbildung auf keinen Fall surjektiv sein und damit gibt es Vektoren $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, für die das Gleichungssystem $(A|\vec{b})$ keine Lösung hat.

Aufgabe 4: **Stochastik** 8 **Punkte**

Wir betrachten die Gleichverteilung der Punkte im Rechteck $R = [0,4] \times [0,2]$. Der Abstand eines zufälligen Punktes aus R zum Rand des Rechtecks sei durch die Zufallsvariable X repräsentiert.

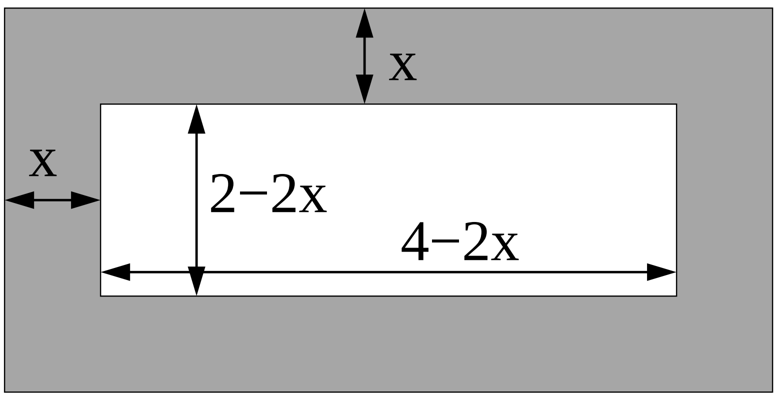
a) Zeigen Sie, dass X die folgende Dichtefunktion hat (Situationsskizze hilft)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ \frac{3-2x}{2} & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und bestimmen Sie den Erwartungswert von X.

b) Die Fläche des größten in R eingeschriebenen Kreises um einen zufälligen Punkt aus R sei durch die Zufallsvariable Y repräsentiert. Wie groß ist der Erwartungswert von Y?

Lösung a: Diese Aufgabe wurde mit einem Quadrat an Stelle des Rechtecks in der Vorlesung gerechnet. Da das Rechteck die Höhe 2 hat, ist der maximale Abstand eines Punkts aus dem Rechteck zum Rand kleiner oder gleich 1, d.h. die Variable X nimmt nur Werte zwischen 0 und 1 an. Für einen gegebenen Wert $x \in [0,1]$ kann man das Ereignis, dass der Abstand eines zufälligen Punktes zum Rand $\leq x$ ist, durch die grau gefärbte Fläche in der Skizze darstellen.



Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X \leq x]$ als Quotient aus dem Flächeninhalt $8 - (4-2x)(2-2x) = 12x - 4x^2$ der grauen Fläche durch den Gesamtflächeninhalt 8 des Rechtecks R:

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ \frac{3x-x^2}{2} & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{falls } x > 1 \end{cases}$$

Die Dichtefunktion erhält man durch Ableitung der Verteilungsfunktion F_X:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \text{ oder } x > 1 \\ \frac{3-2x}{2} & \text{falls } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Berechnung des Erwartungswerts:

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 \frac{3x-2x^2}{2} dx = \left(\frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

Lösung b: Da Radius des größten in R eingeschriebenen Kreises um einen Punkt p mit dem Abstand von p zum Rand übereinstimmt, kann man die Variable Y mit der Kreisflächenformel als Funktion von X beschreiben: $Y = \pi X^2$. Daraus folgt

$$E(Y) = \int_0^1 \pi x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 \frac{3\pi x^2 - 2\pi x^3}{2} dx = \left(\frac{\pi x^3}{2} - \frac{\pi x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Zusatzaufgabe: 6 **Punkte**

Ein Programm enthält eine Schleife in der eine zufällige Zahl $x \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ durch einen Zufallsgenerator gleichverteilt erzeugt wird. Erfüllt die Zahl die Kongruenz $x \equiv 1 \quad mod\ 10$ **oder** die Kongruenz $x \equiv 1 \quad mod\ 9$, bricht das Programm ab, anderenfalls geht es in einen neuen Durchlauf.
a) Bestimmen Sie die erwartete Anzahl der Schleifendurchläufe bis zum Terminieren des Programms. Der Durchlauf in dem die richtige Zahl erzeugt wird, muss mitgezählt werden.
b) Schätzen Sie mit der Markov- und mit der Tschebysheff-Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass das Programm mindestens 20 Schleifendurchläufe ausführt.

Lösung a: Da man bis zum ersten Erfolg immer wieder das gleiche Experiment wiederholt, geht es hier offensichtlich um eine geometrische Verteilung, deren Parameter p (Wahrscheinlichkeit für erfolgreichen Ausgang) bestimmt werden muss:
Von den 100 Zahlen erfüllen 10 die erste Kongruenz und 12 die zweite Kongruenz. Zwei Zahlen, nämlich 1 und 91 erfüllen beide Kongruenzen, so dass $10 + 12 - 2 = 20$ Zahlen (mindestens) eine Kongruenz erfüllen. Daraus ergibt sich der Wert für p und der Erwartungswert für die Anzahl X der Schleifendurchläufe:

$$p = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \qquad \text{und} \qquad E(X) = \frac{1}{p} = 5$$

Lösung b: Die Anwendung der Markov-Ungleichung ist einfach:

$$\Pr(X \geq 20) \leq \frac{E(X)}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Da die Tschebysheff-Ungleichung die Wahscheinlichkeit von $|X - E(X)| \geq t$ abschätzt, muss man vor der Anwendung die Äquivalenz $X \geq 20 \Longleftrightarrow |X - E(X)| \geq 15$ aufstellen und kann dann mit der gegebenen Formel für die Varianz der geometrischen Verteilung weiterarbeiten:

$$\Pr(X \geq 20) = \Pr(|X - E(X)| \geq 15) \leq \frac{Var(X)}{15^2} = \frac{\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}}{225} = \frac{25 - 5}{225} = \frac{4}{45}$$