Mathematik für Informatiker III – WS 2006/07

Klausur 22.02.2007

Name: Musterlöser

Matrikelnummer: .... **Tutor:** ....

Ich bin einverstanden, dass mein Klausurergebnis zusammen mit meiner Matrikelnummer auf einer universitätsinternen Webseite bekannt gegeben wird:

○ **Ja** ○ **Nein**

	Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Aufgabe 5	Gesamt
Punkte	/6	/9	/9	/8	/8	/40

Hinweise:

1) Die Lösung der Aufgaben sollte auf dem entsprechenden Aufgabenzettel oder dessen Rückseite zu finden sein. Falls der Platz nicht reicht, kann auch ein Zusatzblatt verwendet werden - in diesem Fall bitte unbedingt einen entsprechenden **Vermerk auf dem Aufgabenblatt** machen.

Verwenden Sie Tinte oder Kugelschreiber (keinen Bleistift!) in den Farben Blau oder Schwarz – die Farbe Rot ist für die Korrektur reserviert.

3) Achten Sie auf eine ausreichende **Kommentierung** Ihrer Lösungswege. Zur Begründung können alle in der Vorlesung vorgestellten Sätze und Fakten verwendet werden.

4) Einzig erlaubtes Hilfsmittel ist eine (einseitig) hangeschriebene A4-Seite, mit selbst ausgewählten Formeln, Definitionen und Fakten

5) Da die fünfte Aufgabe als Zusatzaufgabe gewertet wird, reichen zum Bestehen 40% der Gesamtpunktzahl, also 16 Punkte.

Viel Erfolg!

Diese Musterlösung gibt ein Beispiel für eine kurze, aber ausreichende Kommentierung der Lösungswege. Zusätzliche, erklärende Kommentare findet man am Ende der Musterlösung.

Aufgabe 1: **LGS und endliche Körper** **6 Punkte**

Bestimmen Sie für das folgende lineare Gleichungssystem über dem **endlichen Körper** $GF(5)$ die vollständige Lösungsmenge. Lösen Sie die Aufgabe mit dem Gauß–Verfahren nach dem in der Vorlesung behandelten Schema:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & & & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

inverse Elem.

a	2	3	4
a^{-1}	3	2	4

Matrixform: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right)$

Umwandlung in Dreiecksform! 2. Zeile = 2. Zeile + 2 * 1. Z.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$x_2 \leftrightarrow x_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Spezielle Lösung: $x_2 = x_4 = 0$ $\quad \left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ 2x_3 = 1 \end{array}\right\} x_3 = 3$

Lösungen des homogenen Systems

1. $x_2 = 1 \quad x_4 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ 2x_3 = 0 \end{array}\right\} x_3 = 0$$

2. $x_2 = 0 \quad x_4 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ 2x_3 = 3 \end{array}\right\} x_3 = 4$$

Lösungsmenge: $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in GF(5) \right\}$

Aufgabe 2: **Euklidische Vektorräume** 9 **Punkte**

a) Sei U der durch die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterrraum des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Betrachten Sie die Orthogonalprojektion P_U als einen Endomorphismus aus $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und bestimmen Sie die Matrixdarstellung dieser Abbildung bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

b) Sei W ein Unterraum eines (endlichdimensionalen) Euklidischen Vektorraums V und P_W die Orthogonalprojektion auf W. Wir definieren einen neuen Endomorphismus

$$f \in \mathrm{Hom}(V, V) \qquad \text{durch} \qquad f(\vec{v}) = \vec{v} - P_W(\vec{v}) \qquad \text{für alle} \qquad \vec{v} \in V$$

Zeigen Sie, dass der Endomorphismus f diagonalisierbar ist und erklären Sie, wie man eine Diagonalbasis finden kann und wie die zugehörige Diagonalmatrix aussieht.

a) Orthonormalbasis von U bestimmen (Gram-Schmidt):

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u_1} = \frac{\vec{v_1}}{\|\vec{v_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = \vec{v_2} - \langle \vec{v_2}, \vec{u_1} \rangle \vec{u_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u_2} = \frac{\tilde{u}_2}{\|\tilde{u}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \tilde{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Def. der Orthogonalprojektion:

$$P_U(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{u_1} \rangle \cdot \vec{u_1} + \langle \vec{v}, \vec{u_2} \rangle \cdot \vec{u_2}$$

Anwendung auf Basisvektoren:

$$P_U(\vec{e_1}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \vec{u_1} + \frac{-1}{2} \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/4 \\ -\sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$$P_U(\vec{e_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{u_1} + \frac{1}{2} \vec{u_2} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/4 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}$$

$$P_U(\vec{e_3}) = 0 \cdot \vec{u_1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{u_2} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Matrix von P_U :

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & -\sqrt{2}/4 \\ 1/4 & 3/4 & \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

b) $f(\vec{v}) = \vec{v} - P_W(\vec{v})$

Eigenschaft der Orthogonalprojektion P_W :

$\forall\ \vec{v} \in W \quad P_W(\vec{v}) = \vec{v} \implies f(\vec{v}) = \vec{v} - \vec{v} = \vec{0}$

$\forall\ \vec{v} \in W^{\perp} \quad P_W(\vec{v}) = \vec{0} \implies f(\vec{v}) = \vec{v} - \vec{0} = \vec{v}$

d.h. $f = P_{W^\perp}$ ist die Orthogonalpr. auf $W^\perp$

f ist diagonalisierbar, weil jede Orthogonalprojektion diagonalisierbar ist !

$$\mathcal{B} = \underbrace{\text{Orthonormalbasis}(W)}_{\text{Eigenwert } 0} \cup \underbrace{\text{Orthonormalbasis}(W^\perp)}_{\text{Eigenwert } 1}$$

$\implies$ Diagonalmatrix mit $\dim W$ Nullen und $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ Einsen auf der Diagonale.

7+2

Aufgabe 3: **Eigenwerte und Eigenvektoren** **9 Punkte**

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der linearen Abbildung f mit der folgenden Matrix A und bestimmen Sie Basen aller Eigenräume dieser Abbildung.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

b) Sei $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine isometrische Matrix und λ ein Eingenwert von B. Welche Werte kann λ annehmen (Begründung!)?

a) charakteristisches Polynom: (Zusatzkommentar $*1$)

$$p_{ch}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -3 & 5-\lambda & 6 \\ 3 & -3 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$ Entwicklung nach 1. Zeile

$$= (2-\lambda) \cdot \left((5-\lambda)(-4-\lambda) - 6 \cdot (-3) \right)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2)$$

Nullstellen: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -1$

$\Rightarrow$ Eigenwerte 2 und -1

Eigenvektoren:

$\lambda = 2$

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \iff -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$$

1) $x_2 = 1 \quad x_3 = 0 \quad \rightarrow x_1 = 1$

2) $x_2 = 0 \quad x_3 = 1 \quad \rightarrow x_1 = 2$

Basis des Eigenraums: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = -1$ $\quad \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2-(-1) & 0 & 0 \\ -3 & 5-(-1) & 6 \\ 3 & -3 & -4-(-1) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ LGS $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$

$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -1$

$\Rightarrow x_1 = 0$

Basis des Eigenraums $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) B isometrische Matrix

$\Rightarrow \quad \| B \cdot \vec{v} \| = \| \vec{v} \|$ für alle $\vec{v} \in V$

$\vec{v}$ Eigenvektor : $B \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

$\Rightarrow \quad \| \vec{v} \| = \| \lambda \cdot \vec{v} \| = |\lambda| \cdot \| \vec{v} \|$

$\Rightarrow \quad |\lambda| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1$

2,5+2+1+2,5

Aufgabe 4: **Stochastik** 8 **Punkte**

Alice und Bob spielen mit einem Kartenspiel mit 32 Karten in den Spielfarben Kreuz, Pik, Herz, Karo und mit den Werten 7,8,9,10,B,D,K,A. Eine Runde verläuft wie folgt:
Bob zahlt einen Euro Einsatz an Alice. Alice schreibt eine Karte ihrer Wahl (z.B. Herz 9) auf einen Zettel und Bob zieht eine Karte aus dem gemischten Kartenspiel. Hat Bob die richtige Farbe, aber den falschen Wert gezogen (z.B. Herz 7), bekommt er den doppelten Einsatz zurück. Hat er den richtigen Wert, aber die falsche Farbe gezogen (z.B. Pik 9), bekommt er den dreifachen Einsatz zurück und hat er die richtige Karte gezogen, bekommt er den sechsfachen Einsatz zurück. In allen anderen Fällen behält Alice den Einsatz. Für die nächste Runde wird die gezogene Karte zurück in den Stapel gelegt und neu gemischt.
Die Beantwortung der folgenden Fragen kann in Form von Brüchen erfolgen. Geben Sie jeweils eine kurze Begründung.

a) Beschreiben Sie den Gewinn (Verlust als negativer Gewinn) von Alice in einer Runde durch eine geeignete diskrete Zufallsvariable X. Bestimmen Sie das Bild von X, die zugehörige Verteilungsfunktion und den Erwartungswert.

b) Variante 1 des Spiels wird über 8 Runden gespielt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bob in allen 8 Runden seinen Einsatz verliert und wie hoch ist der Erwartungswert für die Anzahl der Runden, in denen Bob seinen Einsatz verliert.

c) Bei Variante 2 des Spiels wird so lange gespielt, bis Bob zum ersten Mal eine Runde mit einem Gewinn abschließt. Was ist der Erwartungswert für die Länge (Anzahl der Runden) eines solchen Spiels.

d) Beim Spiel nach Variante 2 sei A das Ereignis, dass Bob in der ersten Runde verliert, und B das Ereignis, dass das Spiel über genau drei Runden geht. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr(B|A)$ und stellen Sie fest, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind.

a) Alice kann einen Euro gewinnen oder einen, zwei oder $5 = 6-1$ Euro verlieren:

$\mathrm{Im}\, X = \{-5, -2, -1, 1\}$ $\quad Pr_X(-5) = \frac{1}{32}$

$Pr_X(-2) = \frac{3}{32}$

$Pr_X(-1) = \frac{7}{32}$

$Pr_X(1) = 1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}$

$$E(X) = \frac{-5}{32} - \frac{2 \cdot 3}{32} - \frac{7}{32} + \frac{21}{32} = \frac{3}{32}.$$

(→ Zusatzkommentar *2)

b) Bob gewinnt eine Runde mit Wahrscheinlichk.

$$p = \frac{1}{32} + \frac{3}{32} + \frac{7}{32} = \frac{11}{32}$$ (→ Zusatzkommentar * 3)

$$q = 1 - p = \frac{21}{32}$$

Variante 1 ist Binomialverteilung:

$$\Pr(\text{Bob verliert 8 mal}) = \left(\frac{21}{32}\right)^8$$

Y = Anzahl der von Bob verl. Runden

$$E(Y) = 8 \cdot q = \frac{21}{4}$$

c) Variante 2 ist geometrische Verteilung.

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{32}{11}$$

d) $\Pr(A) = \frac{21}{32}$

$$\Pr(B) = \left(\frac{21}{32}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{32}\right)$$

$\Pr(A \cap B) = \Pr(B)$ weil $A \cap B = B$

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(B \cap A)}{\Pr(A)} = \left(\frac{21}{32}\right)\left(\frac{11}{32}\right)$$

$$\Pr(A \cap B) \neq \Pr(A) \cdot \Pr(B)$$

$\Rightarrow$ A und B sind <u>nicht</u> unabhängig

(Version 1) $1+1+3+1+2$

Aufgabe 5: **Zusatzaufgabe – Vermischtes** **8 Punkte**

Für die Fragen a) bis d) reicht die richtige Antwort, Begründungen müssen nicht gegeben werden.

a) Sei $V = (GF(3))^7$ und f eine Abbildung aus $\mathrm{Hom}(V, V)$ vom Rang 4. Wieviele Vektoren enthält der Kern von f?

$|Ker\, f| = 3^3 = 27$

b) Sei V ein 8–dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit zwei 3–dimensionalen Unterräumen U und W mit $\dim(U \cap W) = 2$. Welche Dimension hat das Orthogonalkomplement $(U + W)^\perp$?

$\dim(U + W)^\perp = 4$

c) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige $n, m \in \mathbb{N}^+$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $C \in M(n \times m, \mathbb{R})$ wahr? Streichen Sie aus der folgenden Auflistung alle falschen Aussagen (und nur diese!):

- ~~Ist A eine invertierbare Matrix, dann ist A diagonalisierbar.~~
- Ist A Matrix einer isometrischen Abbildung, dann ist A invertierbar.
- Ist $\mathrm{rg}(A) < n$, dann hat A einen Eigenwert.
- ~~Hat A insgesamt n Eigenwerte, dann ist A symmetrisch.~~
- Ist $BC = E_m$, dann ist $m \leq n$.
- ~~Ist $BC = E_m$, dann ist $m \geq n$.~~ (→ Zusatzkommentar $*4$)

d) Sei $H \in M(4 \times 9, GF(3))$ eine Prüfmatrix eines linearen Codes C. In welchem Hammingraum liegt der Code C und aus wievielen Codewörtern setzt er sich zusammen?

$C \subseteq H(9,3) = (GF(3))^9$ und $|C| = 3^5$

e) Angenommen $C \subseteq (GF(2))^{31}$ ist ein 1–perfekter linearer Code. Wieviele Codewörter enthält C? Geben Sie die Anzahl als Potenzausdruck an **und geben Sie eine kurze Begründung**

$|C| = 2^{26}$

Begründung:

$$2^{31} = |C| \cdot \sum_{i=0}^{1} \binom{31}{i} \cdot (2-1)^i = |C| \cdot (1+31)$$

$$= |C| \cdot 2^5$$

$$\Rightarrow |C| = 2^{26}$$

(Version 2) $1+1+3+1+2$

Aufgabe 5: **Zusatzaufgabe – Vermischtes** 8 **Punkte**

Für die Fragen a) bis d) reicht die richtige Antwort, Begründungen müssen nicht gegeben werden.

a) Sei $V = (GF(3))^9$ und f eine Abbildung aus $\mathrm{Hom}(V, V)$ vom Rang 7. Wieviele Vektoren enthält der Kern von f?

$|Ker\, f| =$ 9

b) Sei V ein 9–dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit zwei 4–dimensionalen Unterräumen U und W mit $\dim(U \cap W) = 2$. Welche Dimension hat das Orthogonalkomplement $(U + W)^{\perp}$?

$\dim(U + W)^{\perp} =$ 3

c) Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige $n, m \in \mathbb{N}^+$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$, $B \in M(m \times n, \mathbb{R})$ und $C \in M(n \times m, \mathbb{R})$ wahr? Streichen Sie aus der folgenden Auflistung alle falschen Aussagen (und nur diese!):

- ~~Ist A eine diagonalisierbare Matrix, dann ist A invertierbar.~~
- ~~Ist A Matrix einer isometrischen Abbildung, dann ist A diagonalisierbar.~~
- Hat A den Eigenwert 0, dann ist A nicht invertierbar.
- Ist A eine symmetrische Matrix, dann hat sie n linear unabhängige Eigenvektoren.
- ~~Ist $CB = E_n$, dann ist $m \leq n$.~~
- Ist $CB = E_n$, dann ist $m \geq n$. (→ Zusatzkommentar \#5)

d) Sei $H \in M(5 \times 11, GF(2))$ eine Prüfmatrix eines linearen Codes C. In welchem Hammingraum liegt der Code C und aus wievielen Codewörtern setzt er sich zusammen?

$C \subseteq H(11,2) = (GF(2))^{11}$ und $|C| = 2^6 = 64$

e) Angenommen $C \subseteq (GF(3))^{13}$ ist ein 1–perfekter linearer Code. Wieviele Codewörter enthält C? Geben Sie die Anzahl als Potenzausdruck an **und geben Sie eine kurze Begründung**

$|C| = 3^{10}$

Begründung:

$$3^{13} = |C| \cdot \sum_{i=0}^{1} \binom{13}{i} (3-1)^i = |C| \cdot (1 + 13 \cdot 2)$$
$$= |C| \cdot 27 = |C| \cdot 3^3$$

$$\Rightarrow |C| = 3^{13-3} = 3^{10}$$

Zusatzkommentare

(*1) Die Entwicklung nach der ersten Zeile bei der Berechnung des charakteristischen Polynoms hat den Vorteil, dass man mit $(\lambda-2)$ schon einen Faktor abspalten kann, der den Eigenwert $\lambda=2$ liefert und danach nur noch eine quadratische Gleichung lösen muss. Leider haben das viele Teilnehmer übersehen und das charakteristische Polynom mit der Regel von Sarrus berechnet.

$p_{ch}(\lambda) = -\lambda^3+3\lambda^2-4$, dann muss man eine Nullstelle raten, Polynomdivision ausführen, ...

(*2) Bei der Lösung von 4a) sind zwei Fehler häufig aufgetreten:

1) $\operatorname{Im} X = \{-6,-3,-2,1\}$ liegt zwar nahe, ist aber falsch, denn wenn Bob 6 Euro zurück bekommt, muss das mit seinem Einsatz verrechnet werden. Richtig ist also

$$\operatorname{Im} X = \{-6+1,-3+1,-2+1,1\} = \{-5,-2,-1,1\}$$

2) $Pr_X(-2)$ ist nicht $\frac{1}{8}$ sondern nur $\frac{3}{32}$, denn bei richtigem Wert und richtiger Farbe hat X den Wert -5. Analog $Pr_X(-1)=\frac{7}{32}\neq\frac{1}{4}$

(*3): In Teil 4a) ging es um die Höhe des Gewinns von Alice bzw. Bob – in den Teilen 4b–d) nur um den Fakt, ob Bob gewinnt oder nicht, d.h. wir haben eine Bernoulli-Verteilung mit $p = \frac{11}{32}$ und $q = \frac{21}{32}$ für die einzelne Runde.

- Variante 1 des Spiels macht daraus eine Binomialverteilung (mit $n = 8$) und Variante 2 eine geometrische Verteilung, folglich müssen nur noch die entsprechenden Formeln für die Erwartungswerte angewendet werden.

(*4) Für die 5. Aufgabe gab es zwei Versionen, hier die Kommentare zur ersten Version:

a) $V = (GF(3))^7 \qquad \operatorname{rg} f = 4$

$$\dim(\operatorname{Ker} f) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{\overset{\shortparallel}{\operatorname{rg} f}} = \dim V = 7$$ (Dimensionsformel)

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} f) = 7 - 4 = 3$$

$$\Rightarrow |\operatorname{Ker} f| = 3^3 = 27$$

b) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$

(Dimensionsformel für Unterr.)

$$= 3 + 3 - 2 = 4$$

$$\Rightarrow \dim(U+W)^{\perp} = 8 - 4 = 4$$

sind, z.B. die ... [illegible]

- In einer isometrischen Matrix bilden die Spalten eine Orthonormalbasis $\Rightarrow$ voller Rang $\Rightarrow$ invertierbar
- Ist $rg(A) < n$, dann ist $\dim(\mathrm{Ker}\, A) > 0$, d.h. 0 ist ein Eigenwert von A
- Es gibt Matrizen mit n verschieden Eigenwerten, die <u>nicht</u> symmetrisch sind, z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & & & 1 & n \end{pmatrix}$

(*5) zweite Version von Aufgabe 5 (siehe auch (*4))

a) $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 9 - 7 = 2 \Rightarrow |\mathrm{Ker}\, f| = 3^2 = 9$

b) $\dim(U + W) = 4 + 4 - 2 = 6 \Rightarrow \dim(U+W)^{\perp} = 8 - 6 = 2$

c)
- Die Nullmatrix ist diagonalisierbar, aber nicht invertierbar
- Die Matrizen von Drehungen sind typische Beispiele von isometrischen Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind
- Hat A den Eigenwert 0, dann ist $\dim(\mathrm{Ker}(A - 0 \cdot E_n)) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) > 0$ und folglich ist A <u>nicht</u> invertierbar
- Ist A diagonalisierbar, dann gibt es eine Basis von Eigenvektoren, diese sind dann natürlich linear unabhängig.