Lösungshinweise zur Klausur

Mathematik für Informatiker III

(Dr. Frank Hoffmann)

18. Februar 2008

Matrikelnummer:

Aufgabe 1 Algebraisches I | /6+2+2

(a) Rechnen Sie zunächst nach, dass die Menge $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ von Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie für den Basiswechsel von der Standardbasis in diese Basis B die zugehörige Matrix und die Darstellung (Koordinaten) des Vektors x bezüglich B, wenn der Vektor x bezüglich Standardbasis lautet $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Nennen Sie zwei Möglichkeiten, wie man die zur Umkehrabbildung gehörende Matrix berechnen kann und führen Sie eine davon aus.

(b) (Verständnis) Wann hat die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ über einem Körper $\mathbb{K}$ eine $\mathbb{K}$–Vektorraumstruktur? Begründung!

(c) Sei $(V, \langle\ .\ ,\ .\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft, dass $\forall v, w \in V$: $\langle f(v), w\rangle = \langle v, f(w)\rangle$.
Zeigen Sie, dass dann für einen beliebigen Eigenvektor v von f gilt:

$$\{f(w) | w \perp v, w \in V\} \subseteq \{w | w \perp v, w \in V\}$$

Lösung:
zu(a) B ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$, falls die drei Vektoren linear unabhängig sind, da der $\mathbb{R}^3$ ja Dimension 3 hat. Dazu rechnet man z.B. die entsprechende Rangbedingung nach:

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Die Spalten der Basiswechselmatrix A bestimmen sich dadurch, dass man die Darstellung der Standardbasisvektoren in den Vektoren der Basis B bildet. Es ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_B$ von x bezüglich Basis B kann man explizit durch Lösung des Gleichungssystems bestimmen:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man erhält für x die Darstellung $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$
Die Matrix A liefert natürlich dasselbe:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Umkehrabbildung ist der Basiswechsel von B in die Standardbasis. Dazu kann man die Matrix A invertieren (z.Bsp mit Komplementärmatrix) oder man bestimmt wieder explizit die Spalten. Letzteres ist hier besonders einfach wegen der Standardbasis und wir erhalten:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Und tatsächlich ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

zu (b) Damit die Lösungsmenge von $Ax = b$ eine Vektorraumstruktur hat, sollte sie als additiv neutrales Element den Nullvektor enthalten. Dieser ist genau dann in der Lösungsmenge, wenn $b = 0$ gilt. Dann sind auch die restlichen Vektorraum-Axiome erfüllt, denn dann ist die Lösungsmenge der Kern der durch die Matrix A repräsentierten linearen Abbildung und das ist ein Vektorraum.

zu (c): Um diese Mengeninklusion zu beweisen, müssen wir zeigen, dass aus $w \perp v$ folgt $f(w) \perp v$. Wir müssen also zeigen $\langle f(w), v\rangle = 0$ folgt aus $\langle v, w\rangle = 0$:
Wegen f selbstadjungiert folgt $\langle f(w), v\rangle = \langle w, f(v)\rangle$. Da v Eigenvektor ist und das Skalarprodukt bilinear ist, folgt $\langle w, f(v)\rangle = \langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle v, w\rangle = 0$.

Matrikelnummer:

Aufgabe 2 Algebraisches II | /10+2

(a) Berechnen Sie reelle Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume zur Abbildung, die durch folgende Matrix repräsentiert wird:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Was folgt für die Diagonalisierbarkeit von A und warum ?

(b) Zeigen Sie, dass die quadratischen reellen $n \times n$–Matrizen A und $B^{-1}AB$ dasselbe charakteristische Polynom und damit auch dieselben Eigenwerte haben.

Lösung:
zu (a) Sei f der durch A repräsentierte Endomorphismus. Die Eigenwerte können als Nullstellen des charakteristischen Polynoms berechnet werden:

$$\begin{aligned} P_f(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -8 & -12 \\ 1 & 4-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda)(-8) \\ &= -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Die Matrix A besitzt also die Eigenwerte $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Eigenvektoren und Eigenräume
Zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert λ wird das Gleichungssystem

$$(A - \lambda E)x = 0$$

gelöst. Jede Lösung ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Der Eigenraum zum Eigenwert λ wird von der maximalen Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu diesem Eigenwert aufgespannt.

$\underline{\lambda_0 = 0}$:

$$(A - 0 \cdot E)x = \begin{pmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = 0 \land x_1 = -4x_2$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_0 = 0$ ist also

$$v_0 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Eigenraum ist

$$E_0 = lin\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$:

$$(A - 1 \cdot E)x = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -3x_2 - 4x_3 \wedge x_2 = 0$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ ist also

$$v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Eigenraum ist

$$E_1 = lin\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\underline{\lambda_2 = 2}$:

$$(A - 2 \cdot E)x = \begin{pmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = 0 \wedge x_1 = -2x_2$$

Ein Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ ist also

$$v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der dazugehörige Eigenraum ist

$$E_2 = lin\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Diagonalisierbarkeit
Die Matrix A ist diagonalisierbar, da

$$\sum_{i=0}^{2} \dim E_i = 3 = \dim \mathbb{R}^3$$

zu (b)Es gilt:

$$
\begin{aligned}
P_{B^{-1}AB}(\lambda) &= \det(B^{-1}AB - \lambda E_n) \\
&= \det(B^{-1}AB - \lambda B^{-1}B) \\
&= \det(B^{-1}(A - \lambda E_n)B) \\
&= \det(B^{-1}) \cdot \det(A - \lambda E_n) \cdot \det(B) \\
&= \det(B^{-1}) \cdot \det(B) \cdot \det(A - \lambda E_n) \\
&= \det(B^{-1}B) \cdot \det(A - \lambda E_n) \\
&= \det(E_n) \cdot \det(A - \lambda E_n) \\
&= \det(A - \lambda E_n) \\
&= P_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

Matrikelnummer:

Aufgabe 3 Codiertes /6+2

(a) Betrachten Sie über dem Körper $\mathbb{F}_3$ die folgende Generatormatrix eines linearen Codes:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die zugehörige Checkmatrix. Wie kann man mittels Checkmatrix den Minimalabstand $d(C)$ bestimmen? Tun Sie dies!
Was heißt das für die Fähigkeit dieses Codes zur Fehlerkorrektur und zur Fehlererkennung?
Wieviele Codewörter hat eigentlich dieser Code und warum? Ist er perfekt?

(b) Lösen Sie die Gleichung $43 = 42 \cdot x + 41$ über dem Körper $\mathbb{F}_{71}$. Schreiben Sie kurz dazu, was Sie tun.

Lösung: zu (a) Die Checkmatrix ist

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Minimalabstand von C entspricht der minimalen Anzahl linear abhängiger Spalten in H.
Offensichtlich ist keine Spalte das Vielfache einer anderen, also sind je 2 Spalten linear unabhängig. Man kann jedoch 3 linear abhängige Spalten in H finden:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also gilt $d(C) = 3$.
Ein Code ist k-fehlerkorrigierend $\Leftrightarrow d(C) \geq 2k + 1$
und k-fehlererkennend $\Leftrightarrow d(C) \geq k + 1$.
Also ist dieser Code 1-fehlerkorrigierend und 2-fehlererkennend.
An der Anzahl der Spalten von G können wir ablesen, dass der Code die Dimension 3 hat; als 3-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_3$ hat C damit $3^3 = 27$ Elemente.
Damit C perfekt ist, muss $|C| \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot (q-1)^i = q^n$ gelten.
In unserem Fall gilt aber $|C| \cdot \sum_{i=0}^{1} \binom{6}{i} \cdot 2^i = 27 \cdot (1 + 6 \cdot 2) = 27 \cdot 13$
$= 351 < 729 = 3^6$, also ist C nicht perfekt.

Lösung: zu (b) Zunächst formen wir die Gleichung $43 = 42 \cdot x + 41$ um:

$$2 \cdot 42^{-1} = x$$

Jetzt bestimmen wir mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus das multiplikativ Inverse von 42 in $\mathbb{F}_{71}$:

$$ggT(71, 21) = ggt(42, 29) = ggt(29, 13) = ggt(13, 3) = ggt(3, 1) = 1$$

Wir haben:

$$\begin{aligned}
71 &= 1 \cdot 42 + 29 \\
42 &= 1 \cdot 29 + 13 \\
29 &= 2 \cdot 13 + 3 \\
13 &= 4 \cdot 3 + 1
\end{aligned}$$

Rückwärts eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
1 &= 13 - 4 \cdot 3 \\
&= -4 \cdot 29 + 9 \cdot 13 \\
&= 9 \cdot 42 - 13 \cdot 29 \\
&= -13 \cdot 71 + 22 \cdot 42
\end{aligned}$$

Damit ist 22 das multiplikativ Inverse zu 42 in $\mathbb{F}_{71}$ und somit ist $x = 44$ die Lösung der Gleichung $43 = 42 \cdot x + 41$ über$\mathbb{F}_{71}$.

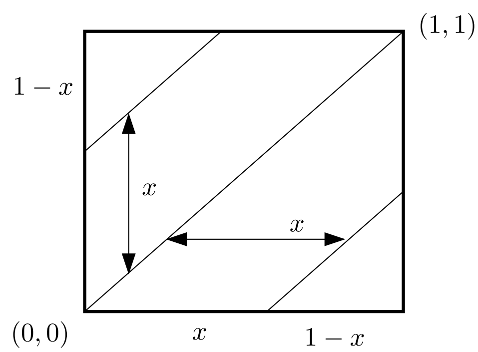
Aufgabe 4 Zufälliges

/8+2

(a) Wir betrachten das Einheitsquadrat $\Omega = [0,1]^2$ im $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der Gleichverteilung. Eine Zufallsvariable X ordnet einem Punkt $p = (a,b)$ den Wert $|a-b|$ zu.
Machen Sie zunächst anhand einer Skizze klar, für welche Punktemenge der Wert von X kleiner oder gleich einem vorgegebenen $x \in \mathbb{R}$ ist. Bestimmen Sie dann Verteilungs- und Dichtefunktion. Rechnen Sie danach Erwartungswert und Varianz von X aus. Stellen Sie eine allgemeine Formel für $E(X^k)$ mit $k \geq 1$ auf.

(b) Wie Sie wissen, gilt in einem Wahrscheinlichkeitsraum für eine aufsteigende Folge $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots$ von Ereignissen, dass $Pr(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} Pr(A_n)$. Geben Sie einen darauf basierenden formalen Beweis für die folgende Aussage: Gegeben seien 2 faire unterscheidbare Würfel. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer beliebig langen Folge von Würfen nie 2 Sechsen geworfen werden, ist gleich Null.

Lösung:



zu (a) Wie in der Abbildung zu sehen entspricht die Punktemenge aller Punkte, bei denen der Wert von X kleiner oder gleich einem vorgegebenen $x \in \mathbb{R}$ ist einem Streifen mit (vertikaler und horizontaler) Breite $2x$ um die $y = x$–Diagonale, dessen Flächenanteil am Einheitsquadrat ist für $0 \leq x \leq 1$ gleich $1-(1-x)^2 = 2x - x^2$. Für die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ergibt sich

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 2x - x^2 & : \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Damit haben wir für die Dichtefunktion $f_X(x)$:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 2 - 2x & : \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Wegen $E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx$ ergibt sich für das k–te Moment

$$E(X^k) = \int_0^1 x^k(2-2x)dx = \left(\frac{2x^{k+1}}{k+1} - \frac{2x^{k+2}}{k+2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

Damit ist der Erwartungswert der ZV gleich $E(X) = 1/3$, für die Varianz folgt $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1/6 - 1/9 = 1/18$.

zu (b): Sei A_n das Ereignis, dass bei den ersten n Würfen eine Doppelsechs dabei ist. Offensichtlich ist $A_n \subset A_{n+1}$ für alle n und $Pr(A_n) = 1 - (35/36)^n$. Wegen $Pr(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} Pr(A_n) = \lim_{n\to\infty} 1-(35/36)^n = 1$ folgt, dass das Komplementärereignis von $Pr(\cup_{n=0}^{\infty} A_n)$ die Wahrscheinlichkeit 0 hat. Aber das ist genau das Ereignis, dass nie eine Doppelsechs fällt.