Aufgabe 1

a) **A(p,q,r)** **B(p,q,r)**

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \quad r$	$\neg q \vee r$	$p \quad (\neg q \vee r)$
w	w	w	f	w	w	w
w	w	f	f	w	f	f
w	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	f	w	w	w
f	w	f	f	w	f	w
f	f	w	f	w	w	w
f	f	f	f	w	w	w

b)

p	q	r	$A(p,q,r) \quad B(p,q,r)$	$B(p,q,r) \quad A(p,q,r)$	$A(p,q,r) \Leftrightarrow B(p,q,r)$
w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	w	f
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

Damit A(p,q,r) notwendig für B(p,q,r) ist, muss die Aussage $B(p,q,r) \quad A(p,q,r)$ erfüllt sein. Dies ist lediglich für die vierte Zeile der Tabelle (p=w, q=f, r=f) nicht der Fall. Diese Belegung der Variablen muss folglich ausgeschlossen werden.

Aufgabe 2

1. $f(x) = x^2 \sin(e^x)$

$f'(x) = 2x \cdot \sin(e^x) + x^2 \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$ (Produktregel, Kettenregel)

2. $g(x) = x \ln x - x$

$g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$ (Produktregel)

$= \ln x + 1 - 1 = \ln x$

3. $h(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

$h'(x) = e^{x \ln x}\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$ (Kettenregel, Produktregel)

$= x^x(\ln x + 1) = x^x \ln(ex)$

Aufgabe 3

a) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+2)^n}$ für alle $n \geq 1$.

Beweis: (vollständige Induktion)

Induktionsanfang: $f'(x) = \frac{1}{2+x}$,

$$f^{(1)}(x) = (-1)^0 \frac{0!}{(x+2)^1} = 1 \cdot \frac{1}{x+2} = f'(x).$$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in IN$ ($n \geq 1$) gelte $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+2)^n}$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch: $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}}$.

Induktionsbeweis:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((-1)^{n-1}(n-1)!(x+2)^{-n}\right)'$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot (-n) \cdot (x+2)^{-n-1}$$

$$= (-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot (n-1)! \cdot n \cdot (x+2)^{-n-1}$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(x+2)^{n+1}} \quad q.e.d.$$

b) Die Taylorreihe einer beliebig oft differenzierbaren Funktion f mit Entwicklungspunkt x_0 hat die allgemeine Form

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Durch Einsetzen von $x_0 = 0$ und Vorziehen des ersten Summanden ergibt sich:

$$T_{f,0}(x) = \frac{f(0)}{0!} \cdot x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n .$$

Mit der soeben bewiesenen Formel für $f^{(n)}$ erhält man:

$$T_{f,0}(x) = \ln(2+0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!(0+2)^n} \cdot x^n$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n2^n} \quad q.e.d.$$

c) Nach dem Wurzelkriterium gilt für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n : R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$. $a_n = \frac{(-1)^n}{n2^n}$, also gilt:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n2^n}\right|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{2^n}}} = 2 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Die Taylorreihe hat den Konvergenzradius 2, ist also konvergent für $|x| < 2$ sowie divergent für $|x| > 2$. Das Konvergenzverhalten in den Randpunkten 2 und -2 muss gesondert betrachtet werden:

$$T_{f,0}(-2) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n2^n}$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \frac{(-1)^{n-1+n}}{n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n}.$$

$(-1)^{2n-1} = -1$, da 2n-1 eine ungerade Zahl ist. Folglich gilt:

$T_{f,0}(-2) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe, die bekanntlich divergent ist.

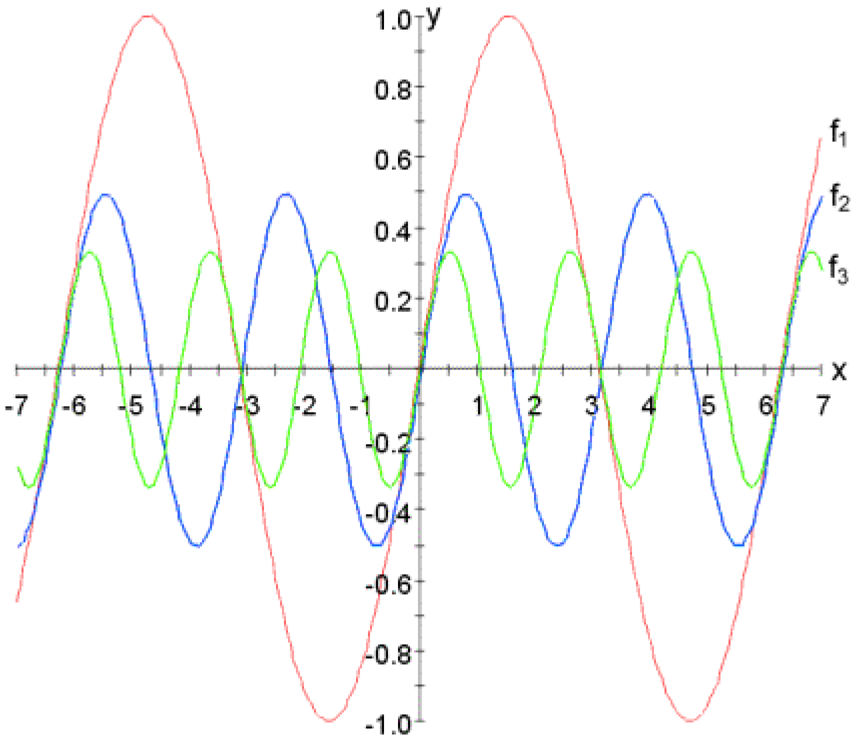
$$T_{f,0}(2) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n2^n} = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

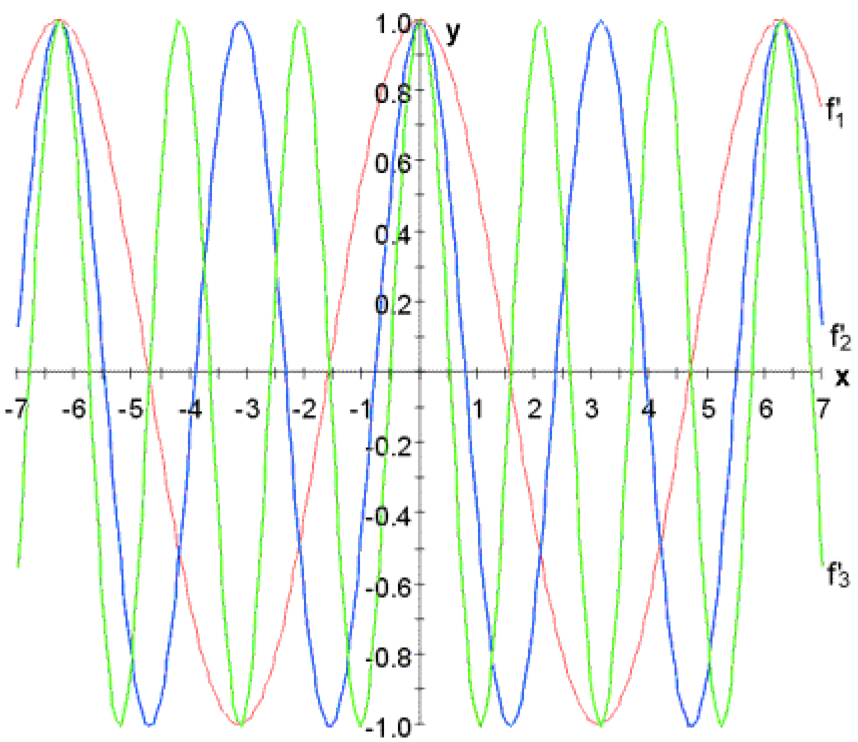
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist als alternierende harmonische Reihe konvergent.

$T_{f,0}$ konvergiert also im Intervall $]-2,2]$, außerhalb hingegen nicht.

Aufgabe 4

a) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}, \quad f_n'(x) = \dfrac{1}{n}\cos(nx)\cdot n = \cos(nx)$





(Die Funktionen f_n sind um den Faktor n in x- und y-Richtung gestaucht, die Ableitungen sind nur in x-Richtung gestaucht.)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)$

$\forall x \in IR\ \forall n \in IN : \frac{1}{n}\sin(nx) \leq \frac{1}{n}$, da $\sin(nx) \leq 1$.

Daraus folgt: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Somit konvergiert die Funktionenfolge (f_n) punktweise gegen die Funktion f mit $f(x) = 0$.

(f_n) konvergiert auch gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$ und $N := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$.

Für alle $n \geq N$ $(n \in IN)$ gilt offensichtlich $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\frac{1}{n}|\sin(nx)| < \varepsilon$, $|\sin(nx)| \leq 1$ für alle $x \in IR$.

$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\sin(nx) - 0\right| < \varepsilon$, $\frac{1}{n} > 0$

$\Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in IR$. *q.e.d.*

c) Da $f_n'(0) = \cos(n \cdot 0) = \cos 0 = 1$ für alle $n \in IN$ gilt, ist auch $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0) = 1$.

$f'(0) = 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$.

Somit konvergiert die Funktionenfolge (f_n') nicht für alle $x \in IR$ gegen die Nullfunktion f'.