Klausur zur Vorlesung Mathematik für Physiker I

Name (Bitte in Druckschrift):
Matrikelnummer:
Studienfach:

Von den Aufgaben 4 bzw. 5 ist nur eine Aufgabe Ihrer Wahl zu bearbeiten, also *entweder* Aufgabe 4 *oder* Aufgabe 5. Sollten Sie zu beiden Aufgaben eine Bearbeitung abgeben, wird nur Aufgabe 4 gewertet. Ergebnisse aus der Vorlesung und den Übungsaufgaben dürfen verwendet werden.

Aufgabe 1 (8 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Aussageformen.

$$A(p,q,r) := (p \wedge \neg q) \Rightarrow r, \qquad B(p,q,r) := p \Rightarrow (\neg q \vee r)$$

a) [4 Punkte] Ergänzen Sie die zugehörige Wahrheitstafel.

p	q	r	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \Rightarrow r$	$\neg q \vee r$	$p \Rightarrow (\neg q \vee r)$
w	w	w				
w	w	f				
w	f	w				
w	f	f				
f	w	w				
f	w	f				
f	f	w				
f	f	f				

b) [4 Punkte] Untersuchen Sie die Beziehung zwischen beiden Aussageformen anhand der Wahrheitstafel.

p	q	r	$A(p,q,r) \Rightarrow B(p,q,r)$	$B(p,q,r) \Rightarrow A(p,q,r)$	$A(p,q,r) \Leftrightarrow B(p,q,r)$
w	w	w			
w	w	f			
w	f	w			
w	f	f			
f	w	w			
f	w	f			
f	f	w			
f	f	f			

Welche Belegung von p, q, r muß ausgeschlossen werden, damit $A(p,q,r)$ notwendig für $B(p,q,r)$ ist?

Aufgabe 2 (7 Punkte)
Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen mit den Ihnen bekannten Ableitungsregeln. Achten Sie darauf, wo immer es möglich ist, Zwischenschritte anzugeben, um die Rechnung nachvollziehbar zu machen.

1. [2 Punkte] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \sin(e^x)$
2. [2 Punkte] $g : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto x\ln(x) - x$
3. [3 Punkte] $h : \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \quad x \mapsto x^x$

Tip zu 3.: Betrachte $e^{\ln(h(x))}$

Aufgabe 3 (18 Punkte)
Sei $f :]-2, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(2+x)$. Weiterhin sei $f^{(n)}$ die n-te Ableitung von f für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) [7 Punkte] Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+2)^n} \text{ für alle } n \geq 1$$

b) [4 Punkte] Sei $T_{f,o}(x)$ die Taylorreihe von f mit Entwicklungspunkt $x_o = 0$.
Zeigen Sie:

$$T_{f,o}(x) = \ln(2) + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n2^n}$$

c) [7 Punkte] Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Taylorreihe $T_{f,o}(x)$. Konvergiert die Reihe auch für $x = \pm R$? (mit *kurzer* Begründung)

Aufgabe 4 (17 Punkte, Alternative zu Aufgabe 5)
Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$.

a) [7 Punkte] Geben Sie die Ableitung von f_n an und fertigen Sie jeweils eine *einfache, schematische* Skizze für die ersten drei f_n bzw. f_n' an. (Also $n = 1, 2, 3$)
(*Denken Sie an Ihre Zeit!*)

b) [8 Punkte] Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 0$ konvergiert. Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f? Beweisen Sie Ihre Antwort!

c) [2 Punkte] Konvergiert die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f'?
(Es reicht einen Punkt x anzugeben, für den $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \neq f'(x)$ gilt.)

Aufgabe 5 (17 Punkte, Alternative zu Aufgabe 4)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine *gleichmäßig stetige* Abbildung und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in I.

a) [6 Punkte] Zeigen Sie, daß $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

b) [5 Punkte] Geben Sie ein Beispiel einer *stetigen* Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ und einer Cauchy-Folge in I, so daß $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *keine* Cauchy-Folge ist.
(Die folgenden Frage können bei der Suche behilflich sein, sollten aber nicht schriftlich bearbeitet werden.)

   - Kann I ein abgeschlossenes Intervall sein?
   - Kann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in I$ sein?

   Es reicht I, f und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anzugeben und zu zeigen, daß $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist.

c) [6 Punkte] Seien $D, W \subset \mathbb{R}$, und $f : D \to W$ eine gleichmäßig stetige und bijektive Abbildung.
Ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to D$ ebenfalls gleichmäßig stetig?
(Hinweis: Betrachten Sie die Wurzelfunktion! Wenn Sie gezeigt haben, daß sie gleichmäßig stetig ist, sind Sie fast fertig ...)

Bitte geben Sie die Klausur spätestens um 13:45 Uhr ab.
Viel Erfolg!