Übungsblatt

Einführung in die Mathem. W.S 04/05

1. Betrachtet werden die folgenden Mengen:

   $A = \{x \mid x = \frac{s}{2}\cdot(3s+1) \text{ mit } s \in \mathbb{N}\}$ und

   $B = \{y \mid y = \frac{t}{2}\cdot(3t-1) \text{ mit } t \in \mathbb{N}\}$. Man zeige:

   a) $A \subset \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{N}$. b) $A \cap B = \emptyset$.

2. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge, und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine beschränkte Folge. Man zeige: Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

3. Betrachtet wird die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k!}{k^k}$. Man zeige: Die Reihe ist konvergent.

   Hinweis: Benutzt werden darf die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

4. Vorgelegt sei die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$; es sei $|c_k| \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Man zeige mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums, daß die Reihe für $|x| < 1$ absolut konvergiert.

5. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine konvergente Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

   a) Man zeige: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

   b) Man gebe ein Beispiel dafür an, daß die Umkehrung von a) nicht richtig ist.

6. g sei eine auf $[-1,1]$ beschränkte Funktion, und es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Betrachtet wird die Funktion $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n \cdot g(x)$. Man zeige: f ist im Nullpunkt differenzierbar, und es ist $f'(0) = 0$.

7. $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - x^3$. a) Man zeige, daß f genau ein strenges lokales Minimum und genau ein strenges lokales Maximum besitzt. b) Man bestimme die Bereiche wo f streng monoton wächst bzw. streng monoton fällt.

8. $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Betrachtet wird die ausgezeichnete Zerlegungsfolge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit
$T_n: x_j^n = a + j \cdot h_n$, $h_n = \frac{b-a}{n}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.
Man zeige: a) $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{S}(f, T_n) = \frac{1}{2}(b-a) \cdot (b+a)$; für $0 \leq a < b$ interpretiere man das Resultat geometrisch.
b) $\overline{S}(f, T_n) - \underline{S}(f, T_n) = \frac{(b-a)^2}{n}$.

9. $c, d \in \mathbb{R}$; a) man zeige: $\max\{c,d\} = \frac{c+d+|c-d|}{2}$,
$\min\{c,d\} = \frac{c+d-|c-d|}{2}$.
b) $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f und g stetig auf $[a,b]$.
Betrachtet werden die Funktionen $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $G: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ und $G(x) = \min\{f(x), g(x)\}$. Man zeige: F und G sind stetig auf $[a,b]$

10. $n \in \mathbb{N}$ und $0 < a < b$. a) Man berechne $\int_a^b x^n \cdot \log_e x \, dx$.
b) Man benutze das in a), bei der Integration erzielte Resultat, und gebe für $x \longmapsto x^n \cdot \log x$, $x > 0$, eine Stammfunktion an. Hinweis: Variable obere Grenze --

Wir wünschen Ihnen einen guten Wirkungsgrad!