Klausur zur Computerorientierten Mathematik I

Wintersemester 2001/02

Ch. Schütte, A. Fischer

Freitag, 01. Februar 2002, 10.30–12.00 Uhr

Name:

Matrikelnummer:

Bitte zunächst den Namen und Matrikelnummer eintragen. Das Aufgabenblatt ist am Ende mit abzugeben. Alle anderen Blätter sind ebenfalls mit Namen zu versehen.

> **Hinweis:** Das Skript zur CoMaI darf während der Klausur verwendet werden. Alle anderen schriftlichen Unterlagen (Übungszettel, zusätzliche Folien, Matlab-Programme, eigene Aufschriebe, ...) sowie Taschenrechner und andere elektronische Geräte sind nicht zugelassen.

Aufgabe 1 (Kondition (8))
Erläutere kurz die zentralen Aspekte der folgenden Punkte jeweils in ganzen Sätzen. Illustriere, wenn nötig, den Sachverhalt anhand einer Skizze.

(a) Erläutere das Konzept der Kondition. Gib jeweils ein Beispiel für ein gut und ein schlecht konditioniertes Problem (mit Begründung).

(b) Was ist der Unterschied zwischen relativer und absoluter Kondition? Gebe ein Beispiel, das absolut gut konditioniert und relativ schlecht konditioniert ist (mit Begründung).

Aufgabe 2 (Komplexität von Algorithmen (8))

(a) Was bedeutet die Schreibweise $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$?

Begründe anhand der Definition der $\mathcal{O}$-Notation, warum für $f(n) = 3n^2 + 2n\sin(n) + 1$ gilt: $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$

(b) Erkläre die Begriffe "Entscheidungsproblem" und "Berechnungsproblem" anhand des Problems des Handlungsreisenden (TSP).

(c) Mit HAMILTON bezeichnen wir das Entscheidungsproblem, herauszufinden, ob ein ungerichteter Graph $G = G(E, K)$ mit $n = |E|$ Ecken und $k = |K|$ Kanten einen Hamiltonkreis enthält oder nicht (zur Erinnerung: ein Hamiltonkreis ist ein Kreis in G, in dem jeder Knoten genau einmal vorkommt). Beschreibe einen Algorithmus, der unter Verwendung des Entscheidungsproblems das zugehörige Berechnungsproblem (Bestimmung eines Hamiltonkreises) löst. Erläutere deinen Algorithmus mit einer Skizze anhand eines Beispielgraphen.

Aufgabe 3 (Lineare Gleichungssysteme (9))

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad 0 < \varepsilon < 1 .$$

Berechne die LR-Zerlegung von A. Bestimme also die Matrizen L und R, die sich aus dem in der Vorlesung besprochenen Gauß-Algorithmus ergeben.

(b) Zeige, dass die Matrixkonditionen $\kappa(A)$ und $\kappa(R)$ bezüglich der Unendlichnorm $\|\cdot\|_\infty$ gegeben sind durch $\kappa(A) = 3+\varepsilon$ und $\kappa(R) = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{3}{\varepsilon^2}$.

(c) Interpretiere im Zusammenhang mit dem Gauß-Algorithmus die Werte von $\kappa(A)$ und $\kappa(R)$ für den Fall $\varepsilon \to 0$.

Hinweis: Die Inverse einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ist gegeben durch} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

falls $ad - bc \neq 0$.

Viel Erfolg!