Klausur + Musterlösung
Numerische Lineare Algebra

Wintersemester 2002/03
C. Schütte, E. Diederichs

Aufgabe 1. *(2+2+2 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

b) Welchen Rang hat A? Beantworten Sie zuerst, ob A vollen Rang haben kann.

c) Wie sehen alle Lösungen zu $Ax = 0$ aus?

Lösung von Aufgabe 1:

a) Bestimmung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A $p_A(\lambda) = \det\big(A - \lambda\mathbf{1}\big) = 0$ durch Berechnung der Determinante mit Hilfe der Sarrusregel:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) \\ = (1-\lambda)(1^2 - 2\lambda + \lambda^2) - 1 + \lambda &= -\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der p, q-Formel

$$\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

folgt daraus:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 1 \quad \lambda_3 = 2$$

b) A kann nicht vollen Rang haben, weil ein Eigenwert der symmetrischen und damit diagonalisierbaren Matrix A gleich 0 ist.

Offensichtlich sind die zweite und dritte Zeile von A linear abhängig. Für die erste und zweite Zeile von A bekommt man mit der Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren sofort

$$\lambda(1,0,0) + \mu(0,1,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0$$

Daher hat A den Rang 2.

c) Die Lösungen zu $Ax = 0$ bekommt man durch Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda = 0$, d.h man löst in $v = (v_1, v_2, v_3)$ das Gleichungssystem $(A - \lambda_1 \mathbf{1})v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Av = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\left| \begin{array}{ccc} v_1 & +0 & +0 = 0 \\ 0 & +v_2 & -v_3 = 0 \\ 0 & -v_2 & +v_3 = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} v_1 = 0 \\ v_2 = v_3 \\ v_2 = v_3 \end{array} \right| \Leftrightarrow v = (0, \alpha, \alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}$$

Aufgabe 2. *(2 Punkte)*
Welche Beziehung besteht zwischen Determinante und Rang einer Matrix?

Lösung von Aufgabe 2:
Da die Determinante eine alternierende Multilinearform ist, gilt:

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{A hat maximalen Rang.}$$
$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{A hat nicht maximalen Rang.}$$

falls A eine quadratische Matrix ist.

Aufgabe 3. *(2+2 Punkte)* Gegeben sei

$$Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass Q eine orthogonale Matrix ist.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Qx = (1,1)^T$.

Lösung von Aufgabe 3:

a) Verifiziere gemäss Definition $Q^T Q = \mathbf{1}$ durch

$$Q^T Q = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9+16 & 12-12 \\ 12-12 & 9+16 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

b) Da Q orthogonal ist, vereinfache durch Matrizenmultiplikation von links:

$$Qx = (1,1)^T \quad \Leftrightarrow \quad Q^T Q x = \mathbf{1} x = Q^T (1,1)^T = \frac{1}{5}(-1,7)^T$$

Aufgabe 4. *(2+2 Punkte)*
Gegeben seien drei Punkte mit den Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) in einer Ebene. Wir suchen eine Parabel durch diese Punkte, d.h. wir suchen die Parameter a, b, c der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, so dass $f(x_k) = y_k$ für $k = 1, 2, 3$. Wann existieren eindeutige Lösungen für diese Parameter?

a) Formulieren Sie die zugehörigen Bedingungsgleichungen in Matrix-Schreibweise.

b) Untersuchen Sie die Eindeutigkeit der Lösung mittels der Eigenschaften der Matrix.

Lösung von Aufgabe 4:

a) Die Bedingungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ f(x_2) &= ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ f(x_3) &= ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise überführt, bekommt man:

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

b) Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar genau dann, wenn die unter a) gewonnene Matrix maximalen Rang hat.
Dies ist klarerweise dann erfüllt, wenn die Variablen x_i paarweise verschieden sind für $i = 1, 2, 3$.