Weihnachtszettel

1.) Gegeben sei die durch $a_{n+1} = a_n \cdot q$, $q \in \mathbb{R}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit dem Anfangswert $a_0 \in \mathbb{R}$. Bestimme die explizite Darstellungsformel für a_n.
(mit Beweis der Darstellungsformel für alle $n \in \mathbb{N}$)

2.) Beweise folgende Ungleichungen:

$$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

3.) Untersuche die Aussage $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$A(n): \quad 2^n \geq n^2 + 2n - 4$$

(Für welche $n \in \mathbb{N}$ stimmt sie?)

4.) Es sei $|x| < 1$. Zeige:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(Hinweis: Untersuche $s_n - x \cdot s_n$)

5.) Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz:

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + 2\sqrt{n}}$ b.) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$

c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

6.) Konstruiere eine konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit:

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \quad \text{und} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \right)$$

Konstruiere auch eine divergente Reihe mit dieser Eigenschaft.

7.) Gegeben sei die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \dfrac{15n^4 + 8n^2 + 3}{3n^4 + 9n^3 + 2n^2}$.

a.) Bestimmen sie den Grenzwert a der Folge $(a_n)_n$.

b.) Man gebe zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$.

c.) Bestimme $n_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

8.) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

a.) Bestimme die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to \infty} f(x), \lim_{x \to 2^-} f(x), \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

und skizziere den Graph der Funktion.

b.) Wie groß muss x sein, damit sich $f(x)$ vom Grenzwert für $x \to \infty$ um weniger als $1/1000$ unterscheidet?