# Klausurübung Computerorientierte Mathematik I

WS 03/04

Dr. Martin Weiser, Gunter Carqué

Die folgenden Aufgaben umfassen alle wesentlichen Themen der Vorlesung und entsprechen vom Umfang und Schwierigkeitsgrad etwa den Klausuraufgaben. Zur Vorbereitung auf die Klausur empfiehlt sich daher die Bearbeitung in rund 90 Minuten unter Zuhilfenahme des Skripts.

- Wahr oder falsch?
  - Es sei rd die Funktion, die jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ die nächstgelegene Maschinenzahl zuordne. Dann ist die Maschinengenauigkeit eps die kleinstmögliche Zahl mit $|x - \mathrm{rd}(x)| \leq \mathrm{eps}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
  - Kondition ist eine Eigenschaft eines Problems.
  - Wenn für eine Matrix $A$ die $LR$–Zerlegung existiert, d.h. wenn $LR = A$ gilt, hat die Matrix $R$ die selbe Kondition wie die Matrix $A$.
  - Bei Auslöschung ist die relative Kondition der Subtraktion gut, aber die Subtraktion in Gleitkommaarithmetik ist bei Auslöschung instabil.
  - Jeder Sortieralgorithmus mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ ist optimal bezüglich der Anzahl der Vergleiche.
  - Für jede Norm gilt die Dreiecksungleichung.
  - $\cos(\frac{1}{n}) = \mathcal{O}(1)$, $n \in \mathbb{N}$.
  - Die Funktion $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ relativ gut konditioniert.
  - Der Gauß-Algorithmus hat einen Aufwand von $\mathcal{O}(n \log n)$.
- Zeigen Sie, daß für reguläre Matrizen $A$ und $B$ gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Gegeben sei das Polynom

$$g(x) = 123456789100\, x^4 - 9876543128000\, x^3 + x\,.$$

  a) Welche Probleme erwarten Sie bei naiver Auswertung von $g$ an der Stelle $x_0 = 80$ in Gleitkommaarithmetik mit einer Maschinengenauigket von $\mathrm{eps} = 2.2 \cdot 10^{-16}$?
  Naive Auswertung bedeute dabei:

```
c = [0 1 0 -9876543128000 123456789100];
x = 80;
a = 0;
for i=1:5
  a = a + c(i)*x^(i-1);
end
```

  b) Geben Sie einen numerisch stabileren Algorithmus zur Polynomauswertung an und begründen Sie, warum der von Ihnen angegebene Algorithmus für das obige Beispiel stabiler ist als die naive Auswertung.

- Gegeben sei für $\varepsilon > 0$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\varepsilon \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\varepsilon}\begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  a) Geben Sie die Kondition der Matrix $A$ in der $\|\cdot\|_\infty$–Norm an. Was geschieht mit der Kondition für $\varepsilon \to 0$?

  b) Wie groß ist der Abstand von $A$ zur Menge aller singulären Matrizen in $\mathbb{R}^{2,2}$ in der $\|\cdot\|_\infty$–Norm?

  c) Geben Sie an, für welche $\varepsilon > 0$ die obige Matrix $A$ numerisch invertierbar ist. Bezeichnen Sie die Maschinengenauigkeit mit eps .

- Bestimmen Sie den Aufwand für den durch folgenden Quellcode gegebenen Sortieralgorithmus:

```
function x = selection(x)

n = length(x);

for i=1:n-1
  for k=i+1:n
    if x(i) > x(k)
      tmp = x(i); x(i) = x(k); x(k) = tmp;
    end
  end
end
```

- Ist die *LR-Zerlegung* eindeutig?

- Geben Sie eine Matrix an, für die der Gauß-Algorithmus ohne Spaltenpivoting instabil ist.

- Geben Sie die binäre normalisierte Gleitkommadarstellung von 0.25 an. Wählen Sie dabei Mantissen- und Exponentenlänge in geeigneter Weise.

**Die Klausur findet am Dienstag, den 10. Februar 2004 im Informatik-Hörsaal statt.**
**Bitte kommt pünktlich um 14:00 Uhr s.t. und bringt euren Personalausweis mit.**