Numerische Lineare Algebra
- Skript zum Proseminar -

Elmar Diederichs
diederic@math.fu-berlin.de

23. Januar 2003

Zusammenfassung

Dieses Skript ist keine Vorlesungsmitschrift im gewohnten Sinne, sondern eine Extraktion der hinter dem mathematischen Apparat stehenden größeren Strukturen. Daher kann es höchstens eine Hilfe bei der Beschäftigung mit dem Formalismus sein und unter keinen Umständen die eigene Auseinandersetzung mit einem ordentlichen Mathematikbuch ersetzen.
Insbesondere wird die Einsicht in größere mathematische Strukturen erkauft durch den Mangel an formaler Ausführlichkeit. Dadurch können viele wichtige Resultate hier gar nicht zur Sprache kommen.

Bearbeitungshinweise:

a) Mit Absicht sind hier nicht alle wesentlichen Begriff definiert oder hinreichend weit entwickelt worden. Der Grund dafür besteht zum Einen darin, daß dieses Skript dann wesentlich länger geworden wäre und zum Anderen wollen wir nicht dazu beitragen, daß der Leser die Lektüre von mathematischen Lehrbüchern umgeht.

b) Alle wirklich wichtigen mathematischen Begriffe sind im Text **fett** gedruckt.

c) Wir werden versuchen, die mathematische Gedankenführung dadurch transparenter zu machen, daß wir zwischen gehaltvollen Sätzen und technischen Lemmata unterscheiden.

Susanne Gerber, Adrian Hass, Martin Held, Falko Krause, Lars Petzold und Ole Schulz-Trieglaff haben große Teile dieses Skripts für LaTeX bearbeitet.

Für die immer noch vorhandenen Fehler und Ungenauigkeiten bin nur ich allein verantwortlich.

Inhaltsverzeichnis

May the force be with you!

1 Größere Strukturen

1.1 Lineare Algebra

1. Matrizen

$\swarrow \quad \searrow$

Sematik einer Matrix   Syntax: Matrixkalkül

2. Semantik einer Matrix

$\swarrow \quad \searrow$

Lin. Gleichungssysteme $Ax = b$ Lin. Abbildungen $F : V \to W$

3. Zentrale Probleme bei linearen Gleichungssysteme über Zahlenkörpern:

   a) Finde Bedingungen der Lösbarkeit.

   b) Frage der Eindeutigkeit der Lösung

   Methoden zur Untersuchung: Rangbestimmung

4. Zentrale Fragen bei linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen V, W:

   a) Dimensionserhaltung des Urbildraums V

   b) Geometrieerhaltung, d.h. Invarianz der Winkel und Längen von Vektoren $v \in V$ unter der linearen Abbildung $F : V \to W$

   c) Invarianzeigenschaften von F unter Basiswechsel in Bezug auf gewisse Unterräume U aus V

   Methoden zur Untersuchung: Rangbestimmung, Determinantenberechnung, Berechnung des Eigen- bzw. Singulärwertspektrums

1.2 Numerik

2 Matrizen

Die uns vorgegebenen formalen Objekte A der Form

$$A := \left(a_{ij}\right)_{n,m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

über den Zahlenkörpern $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ nennen wir Matrizen und schreiben in diesem Fall $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ bzw. $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$.

Für dieses Objekt geben wir einen Kalkül in axiomatischer Form an.

Bemerkung 1. *:*
Dieses Vorgehen ist keineswegs zwingend und wird nur der Kürze halber gewählt. Tatsächlich kann man die meisten dieser Relationen mit den elementaren Matrizenoperationen der Addition und der Multiplikation nachrechnen.

Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times l}, C \in \mathbb{R}^{l\times r}$:

1. $A \cdot B = (c_{ij})$, mit $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Im allgemeinen ist $A \cdot B \neq B \cdot A$.
2. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
3. $A + B = C$, mit $c_{ij} = a_{ij} + bij$.
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.
5. $(A^t)^t = A$ mit $A^t = (a_{ji})_{m,n}$
6. $(A + B)^t = A^t + B^t$
7. $(A \cdot B)^t = B^t A^t$
8. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
9. $(A^{-1})^{-1} = A$, für A quadratisch, d.h. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
10. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, falls A quadratisch ist.
11. $(B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$, falls A, B quadratisch sind.
12. $(\alpha A)^{-1} = \alpha A^{-1}$
13. $(A+B)^k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} A^k B^{k-i}$, falls A und B kommutieren, d.h. $AB = BA$

Es stellt sich die Frage, welche Semantik man für dieses abstrakte Objekt angeben kann.

3 Semantik einer Matrix

Matrizen lassen sich sowohl als Repräsentationen von linearen Abbildungen als auch als Repräsentationen von linearen Gleichungssystemen auffassen [11]. Die Tatsache der Repräsentation meint hier, daß Eigenschaften von linearen Abbildungen und Eigenschaften von linearen Gleichungssystemen Merkmalen von Matrizen bijektiv zugeordnet sind.

3.1 Lineare Abbildungen

3.1.1 Definition

Definition 1. *:*
Unter einer linearen Abbildung F zwischen zwei Vektorräumen V und W verstehen wir die Zuordnung

$$\begin{aligned} F : V &\to W \\ v &\mapsto w \end{aligned}$$

von Elementen $v \in V$ aus dem Urbildraum V zu Elementen $w \in W$, dem Bild- oder Zielraum der Abildung derart, daß gilt:

$$\forall v_1, v_2 \in V : \quad F(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha F(v_1) + \beta F(v_2) \in W$$

Unter einem **Vektorraum** wollen wir eine Menge V mit einer algebraischen Struktur über einem **Körper** K von Zahlen verstehen, bestehend aus

einer bzgl. V inneren Verknüpfung

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (v_1, v_2) &\mapsto v_1 + v_2 \end{aligned}$$

und einer bzgl. V äußeren Verknüpfung

$$\begin{aligned} * : K \times V &\to V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda * v \end{aligned}$$

Bzgl. $+$ ist V eine **kommutative Gruppe** und die Multiplikation mit Skalaren muß für alle $v \in V$ und beliebig vorgegebene Körperelemente λ, μ folgende Gleichungen respektieren, d.h. in der durch

i) $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$

ii) $\lambda(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$

iii) $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v$

iv) $1 * v = 1$

spezifizierten Weise mit der Gruppenstruktur verträglich sein. $\times$ bezeichnet das cartesische Produkt.
Wir beschränken uns im gesamten Skript ausschließlich auf die Betrachtung endlich-dimensionaler Vektorräume.

3.1.2 Repräsentation

Um einzusehen, daß Matrizen lineare Abbildungen repäsentieren, muß man sich klar machen, daß sie lediglich auf der Basis des Vektorraums operieren. Wer werden daher zunächst den Zusammenhang einer Basis mit ihrem Vehktorraum beleuchten und danach das Schicksal einer Basis unter einer linearen Abbildung.

Unter einer **Basis** $\mathcal{B}$ eines Vektorraums wollen wir diejenige Menge $\mathcal{B}$ von linear unabhängigen Vektoren u_i verstehen, die ausreicht, um jedes $v \in V$ unter Ausnutzung der auf V gegebenen algebraischen Struktur, d.h. als Linearkombination

$$\forall v \in V : v = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i \tag{1}$$

darstellen zu können. Die λ_i sind die **Koordinaten** von v bzgl. $\mathcal{B}$. Wir wollen das erläutern und darstellen, was man über eine Basis wenigstens wissen sollte.

Definition 2. *:*
Es heißen Vektoren v_1 und v_2 linear unabhängig genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \lambda * v_1 + \mu * v_2 &= 0 \\ \Rightarrow \lambda = \mu &= 0 \end{aligned}$$

Wesentlich hieran ist, daß die Darstellung (1) eindeutig ist, weil

$$\begin{aligned} v = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i u_i &= \sum_{i=1}^{N} \mu_i u_i \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i - \mu_i) u_i &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_i = \mu_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $\square$. Anschaulich reden wir daher über genau einen Vektorraum, wenn wir eine Basis $\mathcal{B}$ hinschreiben. Damit können wir den Begriff der Basis selbst aufklären:

Definition 3. *: Sei $\mathcal{B} \subseteq V$.*

i) Besteht $\mathcal{B}$ aus paarweise linear unabhängigen Vektoren und ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem, dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis von V.

ii) Eine Teilmenge $\mathcal{V} \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem gdw

$$\Big\{ \sum_i \alpha_i u_i | \alpha_i \in K[x] \ u_i \in \mathcal{V} \ \forall i \Big\} = V$$

Die Idee hieran ist natürlich, daß $\mathcal{B} = \{u_1, -, u_n\}$.

Folglich sollte sich niemand darüber wundern, daß wenn wir einen Vektorraum V in **Unterräume** zerlegen, die ihrerseits durch die Basisvektoren aufgespannt werden, eine Tatsache, die sich als Umkehrung des eben diskutierten Zusammenhang auffassen läßt.

Definition 4. *:*
Eine nicht-leere Teilmenge U eines Vektorraums V über dem Körper K heißt Unterraum von V gdw

i) $x + y \in U \quad \forall x, y \in U$

ii) $\alpha x \in U \quad \forall x \in U \quad \forall \alpha \in K$

Unter einer solchen **direkten Zerlegung** in Unterräume wollen wir folgendes verstehen:

Definition 5. *: Ein Vektorraum V über dem Körper $K[x]$ besitzt eine direkte Zerlegung $V = U_1 \oplus ... \oplus U_n$ in Unterräume $U_1, -, U_n$ gdw*

$$i) \qquad V = U_1 \oplus ... \oplus U_n$$

$$ii) \qquad U_i \cap U_j = \emptyset \quad \forall i, j$$

Es kann gezeigt werden, daß man zu jedem V auch eine Basis finden kann.

> Zum Schluß verabreden wir noch, die Anzahl der Elemente von $\mathcal{B}$ als **Dimension** des Vektorraums V zu bezeichnen.

Damit kommen wir zu der noch ausstehenden Frage, wie $F : V \to V$ auf der Basis $\mathcal{B}$ von V operiert. Das kann man am Besten an einem Beispiel illustrieren. Zu diesem Zweck wählen wir:

i) eine Basis $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ des Bildraums $V = \mathbb{R}^2$

$$u_1^T := (1, 0) \quad u_2^T := (0, 1)$$

Diese Basis bezeichnet man auch als **kanonischen Basis**. Typischerweise schreibt man dann auch $\{e_1, e_2\}$.

ii) eine Basis $\mathcal{A} = \{w_1, w_2\}$ des Urbildraums $V = \mathbb{R}^2$

$$w_1^T := (1, 0) \quad w_2^T := (0, 1)$$

Diese beiden Basen sind willkürlich gewählt und nur zufällig gleich.

iii) eine Abbildung F. Wir wählen der Anschaulichkeit halber eine **Drehung** $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ im Ursprung in **mathematisch positiver Richtung** um den Winkel ν.

Wir betrachten dann z.B. den Vektor $v = (x_1, x_2)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}$. Wie verändert er sich unter F?
Da F linear ist, schreiben wir $F(x) = x_1 F(e_1) + x_3 F(e_2)$. Es genügt daher, die angegebenen Basisvektoren abzubilden. Dann ist nach elementar-geometrischer Anschauung für dieses Beispiel:

$$\begin{aligned} F(u_1)^T &= (\cos\nu, \sin\nu) \\ F(u_2)^T &= (-\sin\nu, \cos\nu) \end{aligned}$$

Das kann man spaltenweise hinschreiben:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\nu & -\sin\nu \\ \sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(u_1) & F(u_2) \end{pmatrix} \tag{2}$$

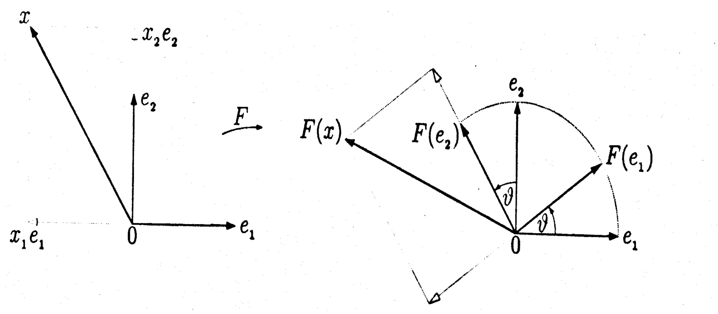

Abbildung 1: Drehung im Ursprung um ν

Was wir durch (2) haben getan, sieht man, wenn man versucht, die Bilder $F(u_j)$ als **Linearkombinationen** der Elemente von $\mathcal{A}$ auszudrücken, d.h.

$$F(u_j) = \sum_i a_{ij} w_i \quad \Leftrightarrow \quad F(u_j) = A \cdot u_j \quad \forall j \tag{3}$$

mit $A := \left(a_{ij}\right)_{i,j}$. Denn da $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ gewählt war, leuchtet es sofort ein, daß die in (3) benötigten Koeffizienten bereits in (2) stehen. Man möge dies nachrechnen, um einzusehen, daß A in (2) den durch die Drehung F zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ etablierten, eindeutigen Zusammenhang darstellt. (3) sagt uns also, wie wir zu einem gegebenen Basispaar die F darstellende Matrix gewinnen können: Wir ermitteln für jedes Urbildbasiselement u_j die Koordinaten des Bildes $F(u_j)^T$ bzgl. der Basis $\mathcal{A}$.

Für unseren Beispielvektor v bedeutet der Spezialfall der **Matrizenmultiplikation** (3) gerade

$$F(v) = A \cdot v = (x_1 \cos\nu - x_2 \sin\nu, x_1 \sin\nu + x_2 \cos\nu)$$

Die Eindeutigkeit der Darstellung des Abbildes von $\mathcal{B}$ unter F folgt aus

$$\forall v \in V: \quad F(v) = F(\sum_i \lambda_i u_i) = \sum_i \lambda_i F(u_i)$$

zusammen mit der Linearität von F und der Eindeutigkeit der Basisdarstellung jedes $v \in V$ bzgl. $\mathcal{A}$. $\square$

> Der Leser möge nun selbst mit Hilfe der **Additionstheoreme** nachrechnen, daß die Spalten von A wieder eine Basis von V abgeben. Dies ist gerade die gedrehte kanonische Basis. Wir schließen daraus weiter, daß die Spalten einer Matrix die eindeutigen Abbilder der Elemente von $\mathcal{B}$ sind und eine Basis desjenigen Raumes $\mathrm{Im}(F)$, dem Abbild von F, darstellen, der durch die Abbildung erzeugt wird.

Man mache sich nochmal klar, daß (2) die Bilder von $\mathcal{B}$ bereits in der nichtgedrehten kanonischen Basis $\mathcal{A}$ darstellt: Nur weil wir die Basis des Bildraums in unserem Beispiel vorgegeben haben, konnten wir die Matrixeinträge von A elementar-geometrisch bestimmen.

In der Literatur wird die Abhängigkeit einer Matrix von zwei Basen häufig deutlich gemacht, indem man die Menge der $(n \times m)$-Matrizen mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(n \times m)$ bezeichnet. Dabei ist n offensichtlich die Dimension des Bildes von F und m die des Urbildes von F.

Bemerkung 2. *:*
Es ist also keine Kleinigkeit, herauszufinden, welche lineare Abbildung F wirklich hinter einer Matrix steckt, da man die gewählten Basen nicht kennt, und man kann dieses Problem auch nicht los werden. Wir werden aber bei der Untersuchung der Normalform einer Matrix eine Möglickeit an die Hand bekommen, eine für F charakteristische Basis anzugeben, die eine eindeutige Zuordnung von Matrix und Abbildung zuläßt.

Die Abbildung von $v \in V$ auf ein geeignet gewähltes $w \in W$ ist also nichts anderes als seine eindeutige Darstellung in der Basis von W inclusive einer Änderung seiner basisabhängigen Koordinaten.

Wir sind damit - modulo formal vollständiger Argumentation - berechtigt, zu behaupten:

> **Jede $(n \times m)$-Matrix A repräsentiert genau eine lineare Abbildung F.**

Das hat zur Folge, daß man Abbildungseigenschaften von F z.B.

i) Dimensionserhaltung des Urbildraums, d.h. F injektiv

ii) Geometrieerhaltung, d.h. $< u, v >=< F(u), F(v) >$ siehe unten

ii) und insbesondere die Eigenschaft der fast-Invarianz der durch die Spalten repräsentierten Unterräume

in den formalen Eigenschaften der Matrix wiederfinden möchte. Die zur Entdeckung dieser Eigenschaften benötigten Instrumente sind der Rang, die Determinante und das Eigen- bzw. Singulärwertspektrum einer Matrix.

3.1.3 Basiswechsel

Wir beuten jetzt unser Beispiel der Drehung aus dem letzten Abschnitt weiter aus: Dort haben wir nachgerechnet, daß die Bilder der Basisvektoren wieder eine Basis des $\mathbb{R}^2$ darstellen.

Was würde passieren, wenn wir die Bilder auch als Basis $\mathcal{A}$ des Zielraums V von $F : V \to V$ wählen würden? Um das festzustellen, benutzten wir wieder (3) und finden - wie durch ein Wunder - für A sofort die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Das Auswechseln einer Basis also ändert die Gestalt der Matrix, die aber natürlich weiterhin dieselbe Drehung F darstellt.

Bemerkung 3. *:*
Für diese Einheitsmatrix, die die identische Abbildung darstellt, schreiben wir manchmal E und manchmal $\mathbf{1}$. Für die Einheitsmatrix ist charakteristisch, daß sie für jede Wahl von $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ von der Gestalt (4) ist.

Wie können wir diese Veränderung einer Matrix durch Auswechseln der Basis in systematischer Weise erfassen? Sollten wir nicht z.B. die Matrix der Drehung selbst als Basiswechselmatrix auffassen? Das geht tatsächlich. Um das vorzubereiten, definieren wir zunächst

Definition 6. *: Eine Matrix heißt invertierbar oder regulär gdw eine Matrix A' existiert mit*

$$AA' = E$$

In diesem Fall identifizieren wir $A' = A^{-1}$ und die Matrizenmenge $GL(n, K) = \{A \in M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(n \times n, K) : A \text{ regulär}\}$ über dem Körper K bildet zusammen mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe [9].

> Man beachte, daß durch diese Definition offenbar ein Verfahren zur Berechnung von A^{-1} an die Hand gegeben wird, weil sich jede äquivalente Zeilenumformung als Linksmultiplikation von A mit einer geeigneten Matrix B darstellen läßt. Spaltenumformungen werden hingegen dargestellt durch die Rechtsmultiplikation von A mit einer Matrix.

Es ist nicht schwer einzusehen, daß invertierbare Matrizen gerade **bijektive**, d.h. solche Abbildungen repräsentieren, die injektiv *und* surjektiv sind. (Beweis als Übung)

Definition 7. *:*
Eine lineare Abbildung F heißt **injektiv** *genau dann, wenn*

$$\forall v, v' \in V : F(v) = F(v') \quad \Rightarrow \quad v = v'$$

und **surjektiv** *genau dann, wenn*

$$\forall w \in W \quad \exists v : w = F(v)$$

Damit hat unser Basiswechselproblem folgende Teilschritte:

a) $F : V \to W$ werde durch irgendeine Matrix A zu gewissen Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gegeben, d.h.

$$w_{\mathcal{A}} = Av_{\mathcal{A}} \tag{5}$$

b) Wir ändern die Basis vom Urbild V von $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{A}'$ und die vom Bild W von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$, an der Gestalt von A ändern wir nichts.

c) Da jeder Zusammenhang zwischen Basen wird durch eine Matrix gegeben wird, werden wir den Zusammenhang zwischen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ durch S und den zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ durch T darstellen, d.h.

$$v_{\mathcal{A}'} = Sv_{\mathcal{A}} \quad w_{\mathcal{A}'} = Tw_{\mathcal{A}} \quad \forall v \in V \quad \forall w \in W \tag{6}$$

d) Damit kein Basisvektor beim Umrechnen von der neuen auf die alte bzw. von der alten auf die neue Basis verloren geht, verlangen wir, daß T und S invertierbar sind.

$$
\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{A}'} \arrow[r, "SAT^{-1}"] & W_{\mathcal{B}'} \arrow[d, "T^{-1}"] \\
V_{\mathcal{A}} \arrow[u, "S"] \arrow[r, "A"'] & W_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 2: Basiswechel

Wir veranschaulichen uns die Sache mittels einer Graphik: Was wir infolge von (6) zusammen mit der Forderung nach Invertierbarkeit erwarten, ist

$$w_{\mathcal{B}'} = Tw_{\mathcal{B}} = TAv_{\mathcal{A}} = TAS^{-1}v_{\mathcal{A}'} \tag{7}$$

Man kann dies auch tatsächlich zeigen und es möge jeder den Beweis zu folgendem Satz in einem Mathematikbuch nachvollziehen. Wir formulieren daher den

Satz 1. *: Sei $F : V \to W$ linear und Basen zu V und W gegeben wie oben beschrieben. Dann gibt es invertierbare Matrizen T und S derart, daß*

$$T \cdot A^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \cdot S^{-1} = A^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'} =: A' \tag{8}$$

und A' ist die F darstellende Matrix von F in der neuen (gestrichenen) Basis.

Matrizen, die in Gleichungen der Art (8) vorkommen, nennen wir **Basiswechselmatrizen**. Errechnet werden solche Matrizen über (3) und sie sind nichts Ungewöhnliches. Basiswechsel liegen z.B. bei Koordinatentransformationen vor.

Im Unterschied zu dem in (7) betrachteten Fall haben wir es jetzt mit $F : V \to V$ zu tun, d.h. im o.g. Beispiel fallen das Urbild mit dem Bild- oder Zielraum der Abbildung zusammen, so daß man F einen **Endomorphismus** nennt. Was heißt das jetzt für die Drehmatrix in (2)? (7) vereinfacht sich zu

$$w_{\mathcal{B}'} = SAS^{-1}v_{\mathcal{A}'} \tag{9}$$

(5) und (9) liefern zusammen

$$A' = SAS^{-1} \tag{10}$$

Matrizen, für die (10) gilt, heißen **ähnlich** zu einander und die Ähnlichkeitsrelation ist eine **Äquivalenzrelation**. Solche Relationen zerlegen die Menge der Matrizen disjunkt in Untermengen von zueinander äquivalenten (hier: ähnlichen) Matrizen und jedes beliebige Element der Untermenge ist i.S.d. der Äquivalenzrelation eindeutiger Vertreter jedes Elements der Untermenge.

Damit ist die Sache klar, denn für unsere Drehmatrix in (2) gilt offenbar, daß sie in einer solchen Äquivalenzrelation vorkommt:

$$\begin{pmatrix} \cos\nu & -\sin\nu \\ \sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\nu & \sin\nu \\ -\sin\nu & \cos\nu \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} -4\cos\nu\sin\nu & 2\sin^2\nu - 1 \\ 2\cos^2\nu - 1 & 4\cos\nu\sin\nu \end{pmatrix}$$

wie jeder nachrechnen kann und daher ist sie eine Basiswechselmatrix. Wir werden in dem Abschnitt über Normalformen ein Verfahren kennenlernen, das Bestehen einer Ähnlichkeitsrelation in systematischer Weise nachzuprüfen.

3.1.4 Bild und Kern

Was passiert, wenn man lineare Abbildungen, sog. **Homomorphismen** vor sich hat, die irgendeinen Zielraum haben?
Zum einen kann es passieren, daß in einen höherdimensionalen Raum hinein abgebildet wird - dann ist $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit $m < n$ - oder in einen niederdimensionalen - dann $n < m$. Um dies deutlich zu machen, definieren wir den Kern von F und das Bild von F durch

Definition 8. *:*
Es sei eine lineare Abbildung $F : V \to W$ gegeben. Dann nennen wir

a) $Im(F) := F(V)$ *das Bild* F

b) $Ker(F) := F^{-1}(0)$ *den Kern oder auch den Nullraum von* F

Daher leuchtet es sofort ein, die sog. **Dimensionsformel** zu formulieren:

$$\dim(V) = \dim(Im(F)) + \dim(Ker(F))$$

Beweis: Übung

3.1.5 Determinante

Was uns zur Charakterisierung einer linearen Abbildung wenigstens noch fehlt, ist ein Maß für die Volumenverzerrung, die diese Abbildung erzeugt. Was mit dem Volumenbegriff gemeint ist, erklären wir an einem Beispiel:

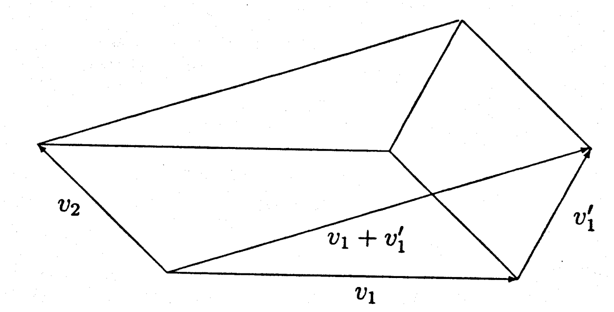

Abbildung 3: Zum Volumenbegriff

Zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ spannen ein Parallelogramm auf und wir können ihm anschaulich ein **Volumen** $\mathcal{V}$ zuordnen auf folgende Weise:

i) $\mathcal{V}(v_1, v_2) \geq 0$ und $\mathcal{V}(v_1, v_2) = 0$ gdw $v_1 || v_2$.
ii) $\mathcal{V}(\alpha v_1, v_2) = |\alpha| \mathcal{V}(v_1, v_2)$ mit $|\alpha| \in \mathbb{R}_0^+$
iii) $\mathcal{V}(v_1 + v_1^{'}, v_2) = \mathcal{V}(v_1, v_2) + \mathcal{V}(v_1^{'}, v_2)$

Diese Anschauung ist unabhängig von der Dimension des betrachteten Vektorraumes gültig, so daß wir definieren:

Definition 9. *:*
Sei V ein n-dimensionaler, endlicher Vektorraum. Dann heißt die Abbildung $\mathcal{V} : \underbrace{V \times ... \times V}_{n} \to \mathbb{R}_0^+$ ein Volumen auf V gdw

i) $\mathcal{V}$ ist linear in jedem Argument (multilinear).

ii) Sind die Vektoren $v_1, -, v_k$ linear abhängig, dann ist $\mathcal{V}(v_1, -, v_k) = 0$ (alternierend)

iii) Es existieren Vektoren $v_1, -, v_j$ mit $\mathcal{V}(v_1, -, v_j) = 0$

Wir führen nun im zweiten Schritt die **Determinante** einer quadratischen Matrix als Maß für die Volumenverzerrung infolge einer linearen Abbildung ein durch die:

Definition 10. *: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathcal{V}(v_1, -, v_n)$ das durch die Vektoren $v_1, -, v_n$ aufgespannte Volumen. Dann ist die Determinante von A erklärt durch*

$$\det(A) := \frac{\mathcal{V}(Av_1, -, Av_n)}{\mathcal{V}(v_1, -, v_n)} \tag{11}$$

Die Determinante erbt somit die Eigenschaften des Volumenbegriffs und man kann zeigen[9], daß infolgedessen der Determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to K$ einer Matrix A folgende die Determinante identifizierende Eigenschaften zukommen:

i) $\det(A)$ ist linear in jeder Zeile (multilinear).

ii) $\det(A) = 0$ gdw A zwei gleiche Zeilen hat (alternierend).

iii) $\det(E) = 0$ mit E als $(n \times n)$-Einheitsmatrix (Normierung).

Wichtig für die Adäquatheit des Begriffs der Volumenverzerrung infolge einer linearen Abbildung ist die Forderung der Unabhängigkeit des Wertes von $\det(A)$ von der Wahl der Basis von V. Man kann zeigen, daß (11) dieser Forderung genügt [9].

Bemerkung 4. *: $\det(A)$ spielt bei Koordinatentransformationen oder bei der Berechnung von Integralen eine wichtige Rolle.*

Zum Schluß formulieren wir noch vier wichtige Sätze, die jeder Leser übungshalber versuchen sollte, zu beweisen:

Satz 2. *: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist*

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rang(A) = \dim(V) \tag{12}$$

Lemma 1. *:* **Entwicklungssatz von Laplace**

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a_{ij} \det(A'_{ji}) \tag{13}$$

und A'_{ji} entsteht durch Streichen von gewählter i-ter Zeile und j-ter Spalte.

Mit dem Entwicklungsatz rechnet man nun sofort nach, daß gilt:

Lemma 2. *: Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine* **rechte obere Dreieicksmatrix***, d.h. von der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix}$$

Dann gilt die praktisch wichtige Beziehung:

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Für spätere Zwecke notieren wir noch ohne Beweis das

Lemma 3. *:* **Multiplikationssatz für Determinanten**

$$\det(A * B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

aus dem man sofort die interessante Folgerung erhält:

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(\mathbf{1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bemerkung 5. *:*
Man kann zeigen, daß ähnliche Matrizen dieselbe Determinante haben.

Vereinfachungen des Entwicklungssatzes für den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$ gibt es in Form der **Sarrusregel**, deren Summanden Produkte aus den, wie in Abbildung (4) gezeigt, verbundenen Koreffizienten sind. Die Vorzeichen der einzelnen Produkt-

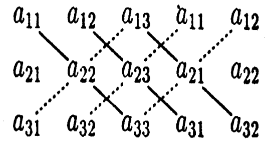

Abbildung 4: Idee der Sarrusregel

terme kann man ablesen aus Abbildung (5), die die Ausführung der Sarrusregel zeigt. Sie genügt zum Lösen der meisten Aufgaben.

Für $n = 3$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

Abbildung 5: Ausführen der Sarrusregel

3.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir untersuchen nun die zweite Möglichkeit, Matrizen zu interpretieren. Dafür beschränken wir uns der Anschaulichkeit halber im Weiteren auf die Betrachtung von Endomorphismen F - es sei denn, wir setzen explizit etwas anderes fest.

3.2.1 Repräsentation

Dank der Matrizenmultiplikation kann ein inhomgenes lineares Gleichungssystem wie folgt repräsentiert werden:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \dots & +a_{1m}x_m & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \dots & +a_{2m}x_m & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}x_1 & +a_{n2}x_2 & \dots & +a_{nm}x_m & = b_n \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$$

Offensichtlich hat die Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor den Effekt die Zeilen der Matrix auszusummieren, was man mit a_j als Matrixspalten äquivalent auch durch

$$Ax = b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} x_j a_j = b$$

ausdrücken kann. Diese Repäsentation ist auch klarerweise eindeutig und wir unterscheiden noch:

Definition 11. *:*
Das lineare Gleichungssystem heißt homogen genau dann, wenn (kurz: gdw) gilt: $b_i = 0 \quad \forall i$.

Wir schließen damit:

> **Jede Matrix A repräsentiert genau ein lineares Gleichungssystem.**

Wir fragen jetzt, ob Eigenschaften des linearen Gleichungssystems z.B.

1. Existenz einer Lösung
2. Eindeutigkeit einer Lösung

mit den Eigenschaften einer Matrix in Zusammenhang gebracht werden können. Dabei wird die Interpretation einer Matrix durch lineare Abbildungen weiterhelfen. Hierfür definieren wir zu allererst:

Definition 12. *:*
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\ \times m}$. Dann nennen wir die Anzahl linear unabhängiger Spalten von A den Rang einer Matrix und schreiben mit $0 < k \leq \max\{m, n\}$:

$$rang(A) = k$$

Für den Rang einer Matrix gilt der folgende wichtige

Satz 3. *:*
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dann gilt:

$$\textit{Zeilenrang}(A) = \textit{Spaltenrang}(A) \tag{14}$$

denn man kann zeigen, daß gilt:

> *Jede Matrix $A \in R^{n\times m}$ ist äquivalent zu einer Matrix $B \in R^{n\times m}$ mit invertierbaren Basiswechselmatrizen S und T*
>
> $$SAT^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$
>
> *und an E_r liest man die Gültigkeit von (14) unmittelbar ab. Solche Basiswechselmatrizen kann man stets finden und die hier gemeinte Äquivalenzrelation ist eine der Ranggleichheit. Ein Beispiel hierfür ist uns schon in (4) begegnet.*

Bemerkung 6. *:*
E_r ist offenbar der Vertreter einer Klasse von Matrizen, die paarweise in der Äquivalenzrelation der Ranggleichheit stehen. Etwas ganz Analoges wird uns bei der Untersuchung der Normalform einer Matrix wieder begegnen.

(15) ist nicht schwer zu beweisen, aber der Nachweis ist etwas länglich. Es sei jedem Leser dringend empfohlen, diesen Beweis in einem Mathe-Buch einmal nachzurechnen: Viele Zusammenhänge versteht man nachher leichter.

Ebenfalls interessant ist der Zusammenhang zwischen dem maximalen Rang einer Matrix und der Matrixgestalt:

> Die Matrix A ist von Maximalrang gdw sie sich durch Äquivalenz-umformungen zu einer rechten oberen Dreiecksmatrix umformen läßt und alle Hauptdiagonaleinträge von Null verschieden sind.

Denn jede weitere (von den interessanten) Zeilenumformungen kann nur noch Einträge oberhalb der Hauptdiagonalen ändern. □

Man beachte auch, daß zwar gilt 'Zeilenrang=Spaltenrang', aber **Spaltenumformungen** keine Äquivalenzumformungen i.o.g.S. sind! Denn Spaltenumformungen mixen Variablen mit verschiedenen Indizes, die bei der Matrixschreibweise von linearen Gleichungssystemen weggelassen wurden. Nur das Vertauschen von Spalten, ist ungefährlich, weil dadurch lediglich ein Umindizieren der Variablen bewirkt wird.

3.2.2 Lösbarkeit

Wir beginnen also jede Fallunterscheidung mit Eigenschaften von F:

1. Ist $F : V \to V$ dimensionserhaltend, d.h. injektiv, dann ist in der repräsentierenden Matrix A keine Matrixspalte von den anderen linear abhängig, so daß A <u>*nicht*</u> durch Äquivalenzumformungen, d.h. elementare Zeilenumformungen auf die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Wir wissen aber aus der Schule, daß man jede Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilen-Stufenform bringen kann. Die dafür erlaubten Äquivalenzumformungen

(a) Vertauschen zweier Zeilen

(b) Multiplizieren einer Zeile mit einem Faktor

(c) Subtrahieren einer Zeile von einer anderen Zeile

werden im **Gaußschen Eliminationsverfahren** zusammengefaßt.

Das Wesentliche an der **Zeilen-Stufen-Form** einer Matrix als Resultat des Gaußschen Eliminationsverfahrens ist, daß jede Zeile (bis auf die vollbesetzte erste) links mindestens eine Null mehr hat, als die darüber stehende Zeile. Damit argumentieren wir:

> Sind nun alle Matrixspalten linear unabhängig, so kann offenbar durch das Gaußsche Eliminationsverfahren höchstens eine rechte obere Dreiecksmatrix entstehen, an der die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems direkt ablesbar ist. (Beweis als Übung)

Für quadratische Matrizen bedeutet dies offenbar:

$$Ax = 0 \text{ ist eindeutig lösbar nur durch } x = 0 \tag{16}$$

- $\Leftrightarrow$ A ist **regulär**.
- $\Leftrightarrow$ $\exists \quad A^{-1}$, d.h. eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang gerade n ist. d.h. A ist **invertierbar** $\quad \Leftrightarrow \quad AA^{-1} = E_n$.
- $\Leftrightarrow$ $Ker(F) = \{0\}$
- $\Leftrightarrow$ $rang(A) = \dim(V)$
- $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$
- $\Leftrightarrow$ A ist nicht **singulär**.

Wieder möge jeder selbst als Übung beweisen, daß das stimmt. Wir finden also, daß $rang(A)$, $\det(A)$ Instrumente sind zur Entdeckung von Eigenschaften sowohl von linearen Gleichungssystemen als auch von linearen Abbildungen.

2. Ist $F : V \to V$ surjektiv, dann muß A weder dimensionserhaltend, noch quadratisch sein.

   a) Im Fall $A \in R^{n\times m}$ mit $n < m$ gibt es mindestens eine nicht-triviale Lösung x: Es liegt ein unterbestimmtes Gleichungssystem vor und man kann $m - \dim(Ker(F))$ Parameter in der Lösung frei wählen.

   b) Im Fall $A \in R^{n\times m}$ mit $n > m$ muß es keine nicht-triviale Lösung geben, da ein überbestimmtes Gleichungssystem vorliegt.

   Wir fassen damit zusammen:

   > **Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ ist eindeutig lösbar gdw die von A repräsentierte Abbildung $F\colon V \to W$ injektiv ist.**

3. Für inhomogene lineare Gleichungssysteme $Ax = b$, die als **affinen Abbildungen** interpretierbar sind, folgt:

   i) F injektiv $\Rightarrow$ $Ax = b$ ist eindeutig lösbar durch $x = A^{-1}b$ für jedes b. Beweis: trivial

   ii) $Ax = b$ ist lösbar gdw $rang(A) = rang(A|b)$. Dieser Fall wurde bereits behandelt: b $\in$ Spaltenraum von A. Wird letzteres nicht vorausgesetzt, so kann man $Ax = b$ nur bis auf einen Fehler

   $$r = Ax - b \tag{17}$$

   lösen und spricht daher manchmal auch von Fehlergleichungen. (17) werden wir später als Residuum bezeichnen und auch im Abschnitt über lineare Ausgleichsprobleme noch einmal auf (17) zurückkommen.

Der allgemeine Zusammenhang zwischen affinen Abbildungen und linearen Gleichungs kann nochmal anschaulich gefaßt werden durch folgenden Satz.

Satz 4. *:*
Es bezeichnen $\mathcal{L}_0$ die Menge aller Lösungen eines homogenen Gleichungssystems und $\mathcal{L}_b$ die Menge aller Lösungen eines inhomogenen Gleichungssystems. Es sei weiter $x_b \in \mathcal{L}_b$ beliebig vorgegeben. Dann gilt

$$\mathcal{L}_b = x_b + \mathcal{L}_0$$

Denn wir können einerseits argumentieren, daß

$$\begin{aligned} Ax_b = b \quad \wedge \quad Ax_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad A(x_b + x_0) = b \\ &\Rightarrow \quad \mathcal{L}_b \supseteq x_b + \mathcal{L}_0 \end{aligned}$$

und andererseits, daß

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{L}_b \text{ beliebig} \quad &\Rightarrow \quad A(x_b - x) = 0 \\ \Rightarrow \quad (x_b - x) \in \mathcal{L}_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_b \subseteq x_b + \mathcal{L}_0 \qquad \square \end{aligned}$$

3.3 summary

Wir konnten plausibel machen, daß die Instrumente $rang(A)$ und $\det(A)$, indem sie Eigenschaften von Matrizen verifizieren, Informationen liefern über die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme und die Abbildungseigenschaften linearer Abbildungen bzgl. der Basen ihrer Vektorräume:

1. der $rang(A)$ über
   (a) die Lösbarkeit und die eindeutige Lösbarkeit(vgl.(16)) von linearern Gleichungssystemen
   (b) die Injektivität von $F : V \to W$ und die Invertierbarkeit von A
2. die $\det(A) = |A|$ über
   (a) den $rang(A)$ (vgl.(12))
   (b) das Maß der Volumenverzerrung infolge von $F : V \to W$ (vgl.(11))

Es bleibt zu fragen, wie die Instrumente $rang(A)$ und $\det(A)$ numerisch beherrscht werden können bzw. mit welchen Problemen wir zu rechnen haben.

4 Numerik linearer Gleichungssysteme

Bekanntermaßen hat man folgenden Zusammenhang in der Numerik:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Eingabefehler} & \rightarrow & \text{Algorithmusfehler} & \rightarrow & \text{Resultatfehler} \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ \text{Kondition des Problems} & & \text{Stabilität des Alg.} & & \end{array}$$

Der Begriff der **Stabilität** eines Algorithmus und Begriff der **Kondition** eines Problems werden zur Kontrolle dieser Fehler eingeführt. Wir vernach-lässigen zunächst einmal Stabilitätsfragen und betrachten nur die Frage der Kondition eines Problems am Beispiel eines lineraren Gleichungssystems, d.h. am Beispiel einer Matrix.

4.1 Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{18}$$

und iteratives Verfahren, daß Näherungslösungen $Ax_m \approx b$ liefert von (18). Solchen Iterationsverfahren sind unvermeidlich, wenn man die Lösung von (18) algorithmisch erlangen will.

> Viele Verfahren zur Lösung von (18) beruhen auf dem **Banachschen Fixpunksatz**, nach dem jede Selbstabbildung $f : I \rightarrow I$ genau einen Fixpunkt $f(x^*) = x^*$ besitzt, falls sie kontrahierend ist, d.h. falls gilt $|x_{k+1} - x_k| < L|x_k - x_{k-1}|$.
> Zur Konstruktion der Approximationslösung überführt man dafür ein Problem $f(x) = 0$ äquivalent in eine Fixpunktgleichung $\phi(x^*) = x^*$. Man kann dann zeigen, daß für die durch die Iterationsvorschrift $\phi(x_k) = x_{k+1}$ definierte Folge $x_k \rightarrow x^*$ eintritt, falls $|x_{k+1} - x_k| < L|x_k - x_{k-1}|$ mit $0 < L < 1$. x^* ist dann Lösung von $f(x) = 0$.

Dann machen wir im k-ten Schritt den Fehler $e_k = A^{-1}b - x_k = x - x_k$. Da wir die wahre Lösung x jedoch erst errechnen müssen und A^{-1} aus numerischen Gründen nicht berechnen wollen, steht als Maß für die Güte der Anpassung nur das **Residuum**

$$r_k := b - Ax_k$$

zur Verfügung. Bezeichnen wir die Länge von r_k ohne nähere Definition mit $\|r_k\|$, dann ist dasjenige Iterationsverfahren wünschenswert, welches am Schluß ein minimales $\|r_k\|$ liefert.

4.2 Numerische Kontrolle

Doch diese Betrachtung macht nur Sinn, falls wir $\|e_k\|$ durch $\|r_k\|$ kontrollieren können, d.h. wir wünschen uns, daß:

$$\|r_k\| \geq \|e_k\|$$

mit möglichst scharfer Abschätzung! Angenommen wir hätten die Vektor- und Matrixnorm schon definiert. Könnten wir dann die gewünschte Kontrolle ausüben?

1. Zur Beantwortung dieser Frage schätzen wir zweierlei ab. Dabei werden wir so tun, als sei nachfolgende Rechnung wohldefiniert und später entsprechende Forderungen an unsere Definitionen stellen, so daß wir nachträglich Recht bekommen. Daher:

$$\|r_k\| = \|b - Ax_k\| = \|Ae_k\| \leq \|A\|\|e_k\| \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|r_k\|}{\|r_0\|} &= \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|b - Ax_k\|}{\|r_0\|} \\ &\geq \|A\|\frac{\|A^{-1}b - x_k\|}{\|r_0\|} = \|A\|\frac{\|e_k\|}{\|r_0\|} \\ &= \frac{\|A\|\|e_k\|}{\|b - Ax_0\|} = \frac{\|A\|\|e_k\|}{\|Ae_0\|} \\ (10) \quad &\geq \frac{\|A\|\|e_k\|}{\|A\|\|e_0\|} = \frac{\|e_k\|}{\|e_0\|} \end{aligned}$$

Diese Ungleichung motiviert die folgende Definition:

Definition 13. *:*
Sei $A \in R^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Dann ist

$$cond(A) := \|A\|\|A^{-1}\|$$

die Kondition der Matrix, da im singulären Fall A^{-1} nicht existiert. Statt von der Kondition einer Matrix spricht man häufig auch von der Kondition eines Problems.

Wir schließen, daß wir die gesuchte Kontrolle nur für gut konditionierte Probleme haben. Diese Tatsache wird später die Motivation für viele Besonderheiten in numerischen Verfahren darstellen.

2. Was bedeutet $cond(A)$ anschaulich?

   i) Von jeder Definition der Matrixnorm werden wir eine Verallgemeinerung der Vektornorm verlangen, d.h.

$$1 = \|E_n\| \tag{20}$$
$$\Rightarrow 1 = \|A^{-1}A\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = cond(A) \tag{21}$$

   ii) Betrachte nun ein gestörtes Gleichungssystem $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Dann folgt:

$$\Delta b = (b + \Delta b) - b = A(x + \Delta x) - Ax = A(\Delta x)$$

   da A linear ist.

Ignoriert man weiterhin, daß man eigentlich noch nicht weiß, daß man die Umformung

$$\|\Delta x\| = \|A^{-1}\Delta b\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\|$$

machen darf, so bekommt man:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A^{-1}\|}{\|A\|^{-1}} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = cond(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \tag{22}$$

(20) - (22) berechtigen uns, $cond(A)$ als Maß für die Verstärkung von Eingabefehlern Δb in der Approximationslösung Δx aufzufassen - und zwar allein aufgrund der Eigenschaften von A.

Wir haben also das Bedürfnis sowohl die Vektornorm als auch die Matrixnorm einzuführen. Damit sind unsere Wünsche klar und wir müssen uns um die Einführung geeigneter Abstandsbegriffe kümmern.

4.2.1 Vektorieller Abstandsbegriff

Definition 14. *: Sei X ein Vektorraum. Dann heißt*

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$$

Norm auf X gdw

i) $\|x\| \geq 0,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\| \quad \forall x \in X$ *und* $\forall \alpha$ *aus dem Körper*

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ *(Dreiecksungleichung)*

Mögliche Realisationen von Normen auf endlichen Vektoräumen X sind:

a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (1-Norm)

b) $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ (2-Norm)

c) $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$ (∞-Norm)

d) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty$ (p-Norm)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^* x},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

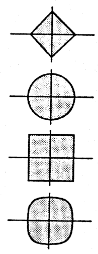

Abbildung 6: Vektornormen von $\{x = C^m : \|x\| \leq 1\}$

Jeder Leser möge als Übung selbst nachrechnen, daß diese Ausdrücke tatsächlich Normen sind. Interessant ist hierzu noch der folgende

Satz 5. *: Auf einem endlichen Vektorraum X sind alle Normen äquivalent, d.h. es gilt*

$$\alpha\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \beta\|x\|_a$$

Die Folge dieses Satzes ist, dass man bei einer Fehleranalyse im Endlichdimensionalen eine Norm z.B. nach ihrer geometrischen Interpretation für den benötigten Zweck wählen darf.

4.2.2 Kondition einer Matrix

Die Matrixnorm setzen wir auf unserer gewählten Vektornorm auf:

Definition 15. *: Sei wieder X ein Vektorraum. Dann ist die Norm einer Matrix erklärt durch*

$$\|A\| := \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Wir betrachten nun mögliche Realisationen von Matrixnormen auf X:

a) $\|A\|_1 = \max\limits_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ Spaltensummennorm

b) $\|A\|_\infty = \max\limits_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ Zeilensummennorm

c) $\|A\|_2 = \left[\rho(A^T A)\right]^{1/2}$ Spektralnorm

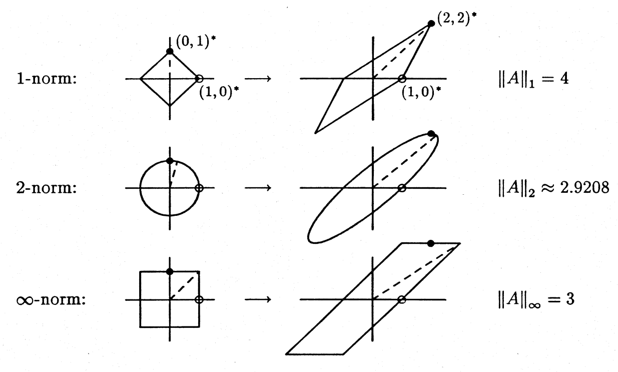

Figure 3.1. *On the left, the unit balls of* $\mathbb{R}^2$ *with respect to* $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, *and* $\|\cdot\|_\infty$. *On the right, their images under the matrix A of* (3.7). *Dashed lines mark the vectors that are amplified most by A in each norm.*

Abbildung 7: Matrixnormen bzgl. Vektornormen im $\mathbb{R}^2$

Jeder Leser möge als Übung selbst nachrechnen, daß diese Ausdrücke tatsächlich Normen sind.

Bemerkung 7. *:*
Den Begriff des Spektralradius $\rho(A)$ werden wir später kennenlernen. An dieser Stelle muß er glücklicherweise nicht weiter benutzt werden.

Da die Funktion $x \rightarrow \|Ax\|$ in jeder unserer Realisationen stetig war, nimmt sie auf der **kompakten Menge** $\{x | \ \|x\| = 1\}$ sicher auch ihr Maximum an, so daß wir abschätzen können:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| < \infty$$

Damit haben wir unsere bisherigen Umformungen gerechtfertigt.

Weil wir bereits wissen, daß die Spalten einer Matrix die Bilder der Basisvektoren darstellen, können wir eine in Abbildung (4.2.2) bereits dargestellte anschauliche Interpretation angeben, nach der eine Matrixnorm ein Maß für die maximale Verzerrung eines gegebenen Vektors (mit basisabhängigem Koordinatenvektor!) durch die lineare Abbildung der Matrix darstellt.

Damit stehen die begrifflichen Intuitionen bereit zur Betrachtung eines Beispiels.

4.3 Ein Beispiel

Betrachte die Matrix $A^T A$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Solche Matrizen sind immer **symmetrisch**, d.h. für solche Matrizen gilt:

$$B := (A^T A) = (A^T A)^T =: B^T$$

Der Leser möge dies an einem selbstgewählten Beispiel einmal nachrechnen. Gegeben sei nun folgende Matrix und wir berechnen in gewohnter Weise:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \curvearrowright \quad A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Im Fall symmetrischer Matrizen liefert die Gauß - Elimination die sog. Diagonalform von A, d.h. es ist ausschließlich die Hauptdiagonale von A besetzt:

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 \\ 7 & 6 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} 1.35 & 0 & 0 \\ 0 & -2.83 & 0 \\ 0 & 0 & 16.67 \end{pmatrix}$$

An dieser **Diagonalform** lesen wir den Maximalrang von A unmittelbar ab und für die Determinate als Maß für die Volumenverzerrung nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz bekommen wir:

$$\begin{aligned} \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{streiche } 1,1} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{streiche } 1,2} + 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{streiche } 1,3} \\ &= 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ &= 3 \neq 0 \end{aligned}$$

A hat daher Maximalrang. Noch einfacher ist der symmetrische Fall:

$$\det(A^T A) = a_{11} a_{22} a_{33} = -46$$

Es sollte jeder die hier ausgelassenen Umformungen selbst nachvollziehen.

Die Spektralnorm ist anschaulich der betragsmäßig größte Eintrag auf der Hauptdiagonalen und auch sie gibt das Maß einer Vektorverzerrung an, die nun an der Diagonalform von $A^T A$ leicht ablesbar ist. Damit bekommen wir unter Benutzung der Definitionen nach Berechnung von A^{-1} und $(A^T A)^{-1}$:

$$\begin{aligned} cond(A) &= 16.67 \\ cond(A^T A) &= (16.67)^2 = 150,82 \end{aligned}$$

Wir lesen daran ab, daß die algorithmische Lösung von $Ax = b$ noch akzeptabel sein mag, die numerische Behandlung von $A^T Ax = b$ jedoch wenig vertrauenerweckend ist. Daher suchen wir nach einer äquivalenten Darstellung der ursprünglichen Problems $Ax = b$ für numerische Verfahren. Es wird sich zeigen, daß die sog. OR-Zerlegung für diese Probleme einen Ausweg bietet. Bevor jedoch verständlich ist, welcher Gedanke dieser Matrix-Zerlegung zugrunde liegt, müssen wir noch tiefer graben.

5 Geometrieerhaltung

Aus numerischer Sicht und auch aus der des Modellierers, der Informationen in den Einträgen der Matrix codiert, sucht man naheliegenderweise nach einer äquivalenten Darstellung von A, die $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ wenigstens nicht verschlechtert. Das bringt uns auf die Idee, folgende **QR-Zerlegung** von A zu fordern:

$$A = QR \tag{23}$$

mit $\|Q\| = 1$. Wir nehmen vorweg, daß solche Matrizen die Eigenschaft

$$Q^T = Q^{-1}$$

besitzen und **orthogonale Matrizen** genannt werden.

Warum ist (23) eine gute Idee? Es gibt zwei Gründe:

1. Falls es Matrizen Q und R gibt derart, daß (23) gilt, so folgt

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Rx = Q^T b$$

   d.h. nach einer optimal konditionierten Matrizenmultiplikation liefert Rückwärtseinsetzen sofort die Lösung.

2. Zwar ist $cond(A) = cond(R)$, doch da die Berechnung von A^{-1} zur Lösung von $x = A^{-1}b$ ihrerseits schlecht konditioniert und obendrein numerisch teuer ist, haben wir etwas gewonnen.

5.1 Orthogonale Matrizen

Wir müssen daher orthogonale Matrizen weiter erforschen, um sie in einem noch zu schreibenden Algorithmus sinnvoll verwenden zu können. Denn als nächstes fragen wir uns natürlich:

- Wie können wir Q erzeugen?
- Wie können wir die Matrixfaktorisierung $A = QR$ berechnen?

5.1.1 Skalarprodukte

Wir wissen bereits, daß für orthogonale Matrizen folgendes gilt:

1) $Q^T = Q^{-1}$: Die Quelle dieser Eigenschaft ist nicht so leicht einzusehen und wird verschoben bis nach der Behandlung des Normalformproblems.

2) $\|Q\| = 1$, d.h. es gibt keine Volumenverzerrung durch Q, was nichts anderes bedeuten kann als daß die lineare Abbildung F, die Q ausführt, geometrieerhaltend ist. Wir nennen F in solchen Fällen **isometrisch**.

   Geometrieerhaltung aber ist äquivalent zu Winkel- und Längenerhaltung unter F und die Längenerhaltung können wir bereits unter Benutzung der

2-Norm ausdrücken durch:

$$\begin{aligned} \forall v \in V: \quad \|v\|_2 &= \|F(v)\|_2 \\ = \Big(\sum_{j=1}^{m} |F(v_j)|^2\Big)^{1/2} &= \Big(\sum_{j=1}^{m} |v_j|^2\Big)^{1/2} \\ =: \sqrt{\langle v, v\rangle} & \end{aligned} \tag{24}$$

Mit dem letzten Gleichheitszeichen haben wir in (24) das von der 2-Norm induzierte **Skalarprodukt** definiert, das wieder alle Eigenschaften der Norm erbt. Man sollte sich merken, daß das Skalarprodukt im Reellen eine positiv definite, symmetrische lineare Abbildung ist, d.h.

i) linear in beiden Argumenten
ii) $\langle w, v\rangle = \langle v, w\rangle$ (symmetrisch)
iii) $\langle v, v\rangle \geq 0$ und $\langle v, v\rangle = 0$ gdw $v = 0$ (positiv definit)

Die elementar-geometrischen Ausdrücke für die trigonometrischen Funktionen deuten darauf hin, daß damit auch die Winkel zwischen Vektoren festgelegt sind. Dies ist auch tatsächlich der Fall. Man kann zeigen - und jeder Leser sollte das selbst nachvollziehen - daß für Vektoren v, w gilt:

$$\langle v, w\rangle = \|v\|_2 \|w\|_2 \cos(\measuredangle(v, w))$$

Statt von einem Skalarprodukt über $\mathbb{R}$ spricht man auch von einer **symmetrischen Bilinearform** $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}_0^+$ und das Paar $\big(V, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ nennt man den **euklidischen Vektorraum**, wenn das Skalarprodukt durch die 2-Norm induziert wird.

Machen wir uns das am Beispiel klar: Beschränken wir uns auf den $\mathbb{R}^2$, so haben wir einer seiner isometrischen Abbildung bereits kennen gelernt: die Drehung. Die zweite und letzte ist die **Spiegelung**.

Man berechne zur Übung die Matrix der Spiegelung im $\mathbb{R}^2$ und prüfe die beiden charakteristischen Eigenschaften nach.

Das Skalarprodukt gibt uns sofort einen weiteren, sehr wichtigen Begriff an die Hand:

Definition 16. *: Zwei Vektoren v, w aus einem Vektorraum V, heißen orthogonal oder senkrecht zueinander gdw*

$$\langle v, w\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v \perp w$$

Was es hieran zu verstehen gibt, ist folgendes: Das durch die 2-Norm induzierte Skalarprodukt löscht den zu w senkrechten und damit linear unabhängigen Anteil des Vektors v. Denn da das Skalarprodukt bilinear ist, folgt

$$\langle v, w\rangle = \langle v_\perp + v_\parallel, w\rangle = \langle v_\perp, w\rangle + \langle v_\parallel, w\rangle = 0 + \langle v_\parallel, w\rangle \tag{25}$$

Das bedeutet, daß die Trivialität

$$v = \langle v, w\rangle w + (v - \langle v, w\rangle w) \tag{26}$$

direkt unsere geometrische Anschauung wiedergibt und wir nennen $\langle v,w\rangle w$ die **orthogonale Projektion** von v auf w.

(26) legt eine Darstellung von $v \in V$ durch eine Menge paarweise orthogonaler Vektoren nahe. Ob eine Basis mit solchen Eigenschaften existiert, hängt offensichtlich nur von den Eigenschaften des Paars $(V, \|\cdot\|)$ ab. Die Darstellung durch eine **Orthogonalbasis** hat die Form:

$$\forall v \in V: \quad v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j \tag{27}$$

Man spricht auch von einer Entwicklung nach Orthonormalbasen. (27) ist die Lösung der Aufgabe, den Koordinatenvektor von v zu einer gegebenen Basis $\mathcal{B} = \{u_i | \langle u_i, u_j\rangle = 0 \quad \forall i,j\}$ zu finden. Die Anwendung von (27) auf ein Saklarprodukt liefert zusammen mit der Eigenschaft der Orthogonalität:

$$\begin{aligned}
\langle v, u\rangle &= \langle \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j, \sum_{i=1}^{n} \langle u, u_i\rangle u_i\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_j\rangle \langle u, u_i\rangle \langle u_j, u_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle v, u_j\rangle \langle u, u_i\rangle
\end{aligned}$$

Ein Spezialfall dieser Umformung ist die nützliche **Parsevalsche Gleichung**:

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle v, u_i\rangle|^2$$

Bemerkung 8. *:*
Die praktisch wichtigen Hilberträume $\mathcal{H}$ besitzen eine Orthogonalbasis.

Wir werden sehen, daß uns das weiterhilft, Q zu berechnen, wenn wir die Idee der orthogonalen Projektion weiterverfolgen.

5.1.2 Projektoren

Wir betrachten nun die Spiegelung eines Vektors v an der Geraden $g = \alpha a$ mit a als Einheitsvektor längs einer vorgegebenen Richtung mit Hilfe des Skalarproduktes genauer. Es soll wie immer $\alpha \in \mathbb{R}$ sein und g oBdA eine Ursprungsgerade. Für eine solche Spiegelung gilt offensichtlich:

$$v^{'} = 2\langle v, a\rangle a - v \tag{28}$$

mit $v^{'}$ als Spiegelbild. Damit lassen sich alle orthogonalen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ durch orthogonale Projektionen ausführen und wir führen daher den Begriff des Projektors ein.

Definition 17. *: Sei $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann ist die Matrix P ein Projektor gdw*

$$P^2 = P \tag{29}$$

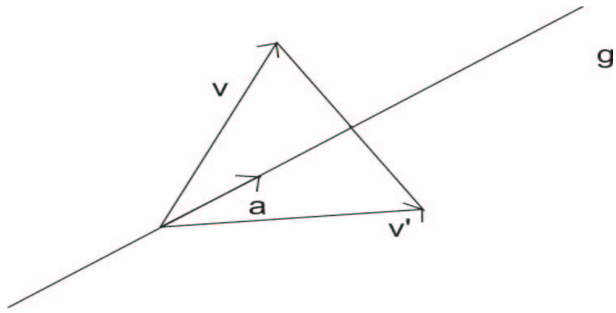

Abbildung 8: Spiegelung an g

Denn über Projektoren sollte man wenigstens folgendes wissen:

i) Sei $Px = v$, d.h. P projeziere auf die durch v vorgegebene Richtung. Dann folgt mit (29): $Pv = P^2x = Px = v$ so daß

$$\forall v \in Im(P) : P(v) = v \tag{30}$$

Da v beliebig aus $Im(P)$ gewählt war, muß es eine Basis von $Im(P)$ geben, die unter der Abbildung P unverändert bleibt. Damit haben wir in Form von (30) zum ersten Mal eine sog. Invarianzeigenschaft einer linearen Abbildung vor uns. Wir werden später sehen, daß diese Basis für P charakteristisch ist und diesen Zusammenhang bis hin zur Jordan-Normalform und zur Singulärwertzerlegung verallgemeinern.

ii) Sei nun $v \notin Im(P)$. Dann ist sicherlich $P(v) - v$ orthogonal zu $Im(P)$.

$$\Rightarrow \quad P(Pv - v) = P(P - E)v = P^2v - Pv = 0$$

Damit ist $(E - P)$ der zu P **komplementäre Projektor**.

Damit erfüllt ein Projektor offensichtlich unsere geometrische Anschauung einer Projektion.

Bemerkung 9. *:*
Der Leser möge sich diese Eigenschaften von Projektoren gut merken als Anschauung für die Behandlung der Normalformproblematik einer Matrix.

Wir betrachten zum Schluß noch die Matrixgestalt orthogonaler Projektoren. Dafür geben wir zunächst die

Definition 18. *: Ein Projektor P ist orthogonal, falls $P^T = P$. Denn es ist:*

$$x^T P^T (E - P)x = x^T (P - P^2)x = 0 \tag{31}$$

und das besagt doch, daß die Projektion von x und die komplementäre Projektion von x senkrecht aufeinander stehen, was nichts anderes ist als

$$Im(P) \perp Ker(P)$$

Grund genug, um nach der Anschauung von einem orthogonalen Projektor zu sprechen. □

Die anschauliche Bedeutung der Orthogonalprojektion ergibt sich für den $\mathbb{R}^2$ sofort durch den Satz von Pythagoras

$$\|y - P(y)\| = \min_{x \in Im(P)} \|y - x\| \tag{32}$$

Man beachte, daß (31) die Aussicht eröffnet, einen kompletten Vektorraum disjunkt zu zerlegen in die Bilder von Projektoren, d.h.

$$V = \oplus_i^n Im(P_i) \tag{33}$$

Jeder Leser möge diesem Hinweis mit Hilfe eines Mathe-Buchs selbst einmal nachgehen. Die Form der Matrix des Projektors ergibt sich aus (27):

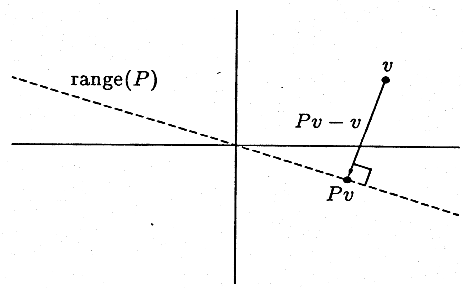

Figure 6.2. *An orthogonal projection.*

Abbildung 9: orthogonale Projektion im $\mathbb{R}^2$

$$Pv := \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j \rangle u_j \tag{34}$$

und die u_j sind die orthogonalen Basisvektoren von $Im(P)$. Normiert man die Basisvektoren zusätzlich auf die Länge 1, so bekommt man aus (34) die Darstellung

$$Pv = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, u_j \rangle u_j}{\langle u_j, u_j \rangle}$$

Definition 19. *:*
Eine Basis, die aus normierten und paarweise orthogonalen Vektoren besteht, heißt Orthonoralbasis.

Folglich kann man für die Projektion auf einen Vektor u mit $\|u\| = 1$ die Projektion ganz allgemein schreiben:

$$P_u \quad := \quad \frac{uu^T}{u^T u} \tag{35}$$

Für die komplementäre Projektion bekommt man

$$P_{\perp u} \quad := \quad E - \frac{uu^T}{u^T u} \tag{36}$$

Daher beschreibt wegen (28) der Ausdruck

$$H_u \quad := \quad E - 2\frac{uu^T}{u^T u}$$

die Spiegelung an der durch u bestimmten Geraden. Solche Matrizen nennt man **Householder-Matrizen**, die sog. Householderreflexionen ausführen.

Der Leser möge zur Übung selbst nachrechnen, daß H_u eine symmetrische und orthogonale Matrix ist.

5.2 QR-Zerlegung

Mit diesem Wissen über Projektoren kehren wir zu unseren beiden Berechnungsproblemen zurück und fragen: Wie wirkt eine Householder-Matrix H_1 auf unser A aus $Ax = b$?

Sei nun a_i die i-te Matrix-Spalte von A und e_i der i-te Einheitsvektor. Wir wählen zudem als Konstruktionsbedingung für H_1 gemäß [10]:

$$\begin{aligned} u_1 \quad &:= \quad a_1 - \alpha e_1 \quad \text{mit} \\ \alpha \quad &:= \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{a_{11}}{|a_{11}|}\sqrt{a_1^T a_1}, & a_{11} \neq 0 \\ \sqrt{a_1^T a_1}, & a_{11} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$H_1 A e_1 = a_1 - 2\frac{u_1 u_1^T}{u_1^T u_1} a_1 = a_1 - u_1 = \alpha e_1$$

denn es kann jeder Leser selbst elementar nachrechnen, daß gilt:

$$\begin{aligned} u_1 u_1^T \quad &= \quad 2(a_1^T a_1 + |a_{11}|\sqrt{a_1^T a_1}) \\ u_1^T a_1 \quad &= \quad \frac{1}{2} u_1^T u_1 \end{aligned}$$

H_1 längs u_1 eliminiert daher Einträge in der ersten Spalte von A unterhalb der Hauptdiagonalen. Das erzeugt die Matrix

$$H_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Der zweiten Projektor aus $H_2^{'} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ gewonnen und $H_2^{'}$ wird analog berechnet zu $e_2^T = (0, 1, -, 0)$ mit

$$A_2^{'} = \begin{pmatrix} R_{11} & * \quad \dots \quad * \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\quad A_2 \quad} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

und A_2 ist der untere $(n-1) \times (n-1)$-Ausschnitt aus A. Der komplette H_2-Projektor hat damit die Form

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & H_2^{'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren der kanonischen Basis paarweise orthogonal zueinander sind, besteht die anschauliche Bedeutung der QR-Zerlegung darin, die Spalten von A senkrecht aufeinander zu stellen und diesem Senkrechtstellen entspricht jeweils eine Linksmultiplikation mit einer orthogonalen Matrix. Damit erhalten wir unser gesuchtes Q bzgl. der kanonischen Basis auf konstruktivem Weg aus

$$Q := \prod_{j=1}^{m} H_j \tag{37}$$

was zu zeigen war. Wir schließen daraus, daß sich hinter orthogonalen Matrizen, d.h. Matrizen Q mit der Eigenschaft $Q^T = Q^{-1}$ orthogonale Projektoren verbergen.

Der Leser mache sich noch mal klar, daß die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist: Begonnen wird (37) rechts mit dem Index $j = 1$.

Da wir die Konstruktion von Q im Detail verfolgt haben, notieren wir den einschlägigen Existenzsatz jetzt ohne weiteren Beweis:

Satz 6. *:*
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $m \leq n$, $rang(A) = m$. Dann besitzt A eine QR-Zerlegung

$$A = QR$$

mit $\|Q\| = 1$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, bei der $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nicht-verschwindende Hauptdiagonalelemente hat.

Dieser Satz impliziert weder, daß R von Höchstrang ist, noch setzt er voraus, daß A regulär ist.

Folglich setzt uns die QR-Zerlegung in die Lage, ein lineares Gleichungssystem i.S.v. (24) zu lösen.

Dies ist natürlich nur ein konstruktiver Weg, die QR-Zerlegung zu berechnen, der viel von der hinter der Zerlegung stehenden Idee erkennen läßt. Numerisch wird man je nach den Prioritäten, die man bei der Lösung einer Aufgabe hat, einen etwas anderen Weg einschlagen vgl. [4].

6 Lineare Ausgleichsprobleme

6.1 Motivation

Wir werden uns als nächstes mit sog. linearen Ausgleichsproblemen der Form

$$\|r\|_2 = \|Ax - d\|_2 = \min_x$$

beschäftigen. Wie entstehen solche Probleme typischerweise? Dafür betrachten wir eine sog. **Zeitreihe** z.B.

t/s	1	2	3	4	5
x(t)/m	14	28	84	112	183

Das sind Daten, die zu bestimmten Zeitpunkten aufgenommen werden und in diesem Fall ist jedes einzelne Wertepaar eine Realisation des Wegzeitgeseztzes, das wir durch zweimalige Intergation aus der Bewegungsgleichung des freien Falls im Vakuum erhalten:

$$\frac{d}{dt^2}x(t) = g \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

Durch diese Zeitreihe wird ein überbestimmtes Problem definiert, dessen Lösbarkeitsbedingungen wir bereits in (17) kennengelernt haben. Wir wollen v_0, g aus dem Datensatz bestimmen und können dafür oBdA $x_0 = 0$ setzen. Die Folge ist, daß unsere Matrix die Gestalt annimmt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \\ 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} 14 \\ 28 \\ 84 \\ 112 \\ 183 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad A \begin{pmatrix} v_0 \\ g \end{pmatrix} = d$$

Nehmen wir nun einmal an, die Lösung dieses überbestimmten Ausgleichsproblems sei nicht garantiert. Dann muß $\|r\|_2 \neq 0$ sein, unabhängig von der Tatsache, daß das Wegzeitgeseztz einen nicht-linearen Zusammenhang instantiiert. Schließlich können wir auch einen andern Zusammenhang wählen. Das folgende

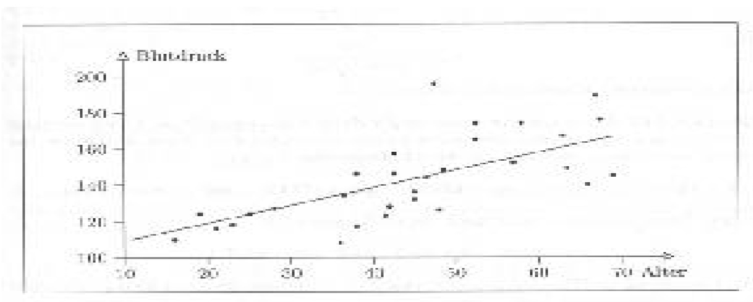

Abbildung 10: Beispiel eines verrauschten Zusammenhangs

Punktediagramm z.B. läßt vermuten, daß es sich in diesem Beispiel um einen linearen Zusammenhang handelt und wir versuchen, ihn zu rekonstruieren, indem wir eine sogenannte Ausgleichsgrade berechnen mit Hilfe des Ansatzes:

$$\begin{aligned} \text{Blutdruck}(Alter) &= a \cdot Alter + d_i + \text{ zufällige Abweichung} \\ \Leftrightarrow \quad y_i &= a \cdot x_i + d_i + r_i \end{aligned} \tag{38}$$

Man spricht in diesem Fall auch von einer linearen Regression.

Wenn nur zufällige Fehler als Abweichungen von der Ausgleichsgraden vorkommen, sind alle Abweichungen des Betrages nach gleichwahrscheinlich und daher erhalten wir die optimale Gerade aus der anschaulichen Forderung der Minimierung der Summe aller Abstände der Datenpunkte $(y_i(x_i), x_i)$ zu der gesuchten Gerade. Da b_i der vorhergesagte Achsenabschnitt ist, können wir $y_i + d_i =: b_i$ setzen. Damit gewinnen wir die Forderung

$$\|r\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2 = \min \tag{39}$$

Bemerkung 10. *:*
(39) ist eine quadratische Form. Aus diesem Grund kann man der Minimierung von (39) statistische Eigenschaften zuweisen. [2]

6.2 Optimierung

Wir wenden die Technik der Housholder-Reflexionen nun an auf das lineare Optimierungsproblem:

$$\|r\|_2 = \|Ax - b\|_2 = \min_x \tag{40}$$

das jedem Leser schon aus (32) bekannt vorkommen sollte. Man nennt $\|r\|_2$ auch die Zielfunktion des Optimierungsproblems. Wir betrachten zuerst die analyti-

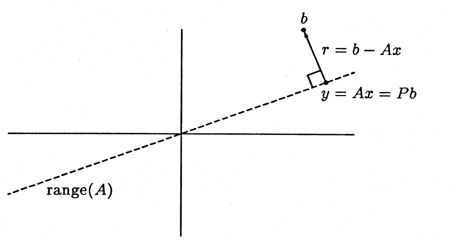

Figure 11.3. *Formulation of the least squares problem* (11.2) *in terms of orthogonal projection.*

Abbildung 11: lineares Ausgleichsproblem

sche Lösung von (40) und setzten voraus, daß A von Höchstrang ist. Wir sehen anschaulich, daß das Residuum r senkrecht steht auf $P_A b$.

Da die Potenzfunktion streng monoton ist, sind die folgenden Minimierungsprobleme äquivalent

$$\begin{aligned} \|r(x)\|_2 = \sqrt{\langle r(x), r(x)\rangle} &= \min_x \\ \frac{1}{2}\langle r(x), r(x)\rangle = \frac{1}{2} r \cdot r &= \min_x \end{aligned} \tag{41}$$

Aber (41) ist viel leichter zu berechnen, weil die Wurzelfunktion fehlt.

6.2.1 Normalengleichungen

Anschaulich bedeutet (40), die orthogonale Projektion von b auf Ax zu berechnen, denn sie ist diejenige von minimaler Länge. Das aber ist nichts anderes als die Forderung:

$$\|r(x)\|_2^2 = r^T r = x^T A^T Ax - 2(Ax)^T b + b^T b = \min_x \tag{42}$$

Die notwendige Bedingung eines Extremalpunktes für Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\nabla_x \|r(x)\|_2^2 = 0$$

liefert mit(42) die Forderung nach der Gültigkeit der Normalengleichungen

$$A^T Ax = A^T b \tag{43}$$

Denn $\|r(x)\|_2^2$ wird durch die Lösung von (43) in x auch tatsächlich minimiert: Die zweite Ableitung von (42) in x ist gerade $2A^T A$ und $A^T A$ selbst ist **positiv definit** wegen

$$\begin{array}{rcl} x^T A^T Ax & = & (Ax)^T (Ax) \geq 0 \quad \forall x \quad \text{sowie} \\ x^T A^T Ax & = & 0 \quad \Leftrightarrow \quad (Ax) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \end{array}$$

und - wie schon mal nachgerechnet - symmetrisch. Andernfalls kann nur noch ein Sattelpunkt vorliegen.

6.2.2 Lösbarkeit des Ausgleichsproblems

Wir notieren rasch die wichtigsten Zwischenergebnisse:

1. $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Lösung von $\|Ax - b\|_2 = \min$ gdw $x \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $A^T Ax = Ab$ ist.
2. Diese Lösung ist eindeutig genau dann, wenn A von Höchstrang ist.
3. Die Lösung ist zugleich die kürzeste Lösung in Bezug auf die euklidische Norm.

Wir zeigen jetzt noch als Anwendung zur linearen Algebra, daß $A^T Ax = Ab$ mindestens eine Lösung besitzt:

i) Wir erinnern uns, daß ein inhomogenes Gleichungssystem lösbar ist gdw gilt:

$$rang(A) = rang(A|b)$$

Das bedeutet offenbar, daß jedes Element des Kerns von F zu A orthogonal auf der rechten Seite b des Gleichungssystems steht, d.h. es ist nach der Dimensionsformel: $x \in Ker(F) \perp b$.

ii) Da F zu A linear ist, gibt es sicherlich ein gewisses x derart, daß

$$\begin{gathered} 0 = A^T Ax = A^T b \\ \Rightarrow x^T A^T Ax = \|Ax\|_2^2 = 0 \\ \Rightarrow Ax = 0 \\ \Rightarrow (Ax)^T b = 0 \\ \Rightarrow \exists x : x \in Ker(F) \perp b \\ \Rightarrow rang(A) = rang(A|b) = Ker(A^T)^{\perp} \end{gathered}$$

was gerade zu zeigen war. Wir haben daher die folgende Äquivalenz:

$$Ax = b \Leftrightarrow A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b =: A^+ b$$

A^+ wird auch als **verallgemeinerte Inverse** bezeichnet und $A^T A$ kann wegen der Formgleichheit zu (35) als Projektor auf $range(A)$, d.h. $Im(F)$ zu A aufgefaßt werden.

6.2.3 Statistische Bedeutung

Wir betrachten wieder

$$A^T Ax = A^T b \Leftrightarrow x = (A^T A)^{-1} A^T b =: A^+ b$$

und nehmen an, daß die empirischen Daten b einer durch

$$Var[b] := E[(b - E[b])^2] = E[b^2] - E[b]^2 = \sigma^2 \mathbf{1}$$

beschriebenen Streuung oder auch Varianz unterliegen. Zu diesem Zweck fassen wir b als Vektor von unabhängigen Zufallsvariablen b_i auf, die in unserem Beispiel irgendwelche Werte angenommen haben.

Bemerkung 11. *:*
Das Verhalten einer z.B. reellen Zufallsvariablen wird bestimmt durch ihre Verteilung $P(X)$

$$P(X \leq x) := F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

$F(x)$ nennt man Verteilungsfunktion und $f(x)$ Dichte der Verteilung. Wir schreiben allgemein für das erste Moment der Verteilung, d.h. für den Erwartungswert einer Zufallsvariable X mit Werten aus der Menge Ω

$$E[X] := \int_{\Omega} xP(X = x)dx$$

Wir erwähnen ohne Beweis, daß der Erwartungswert durch eine lineare Funktion repräsentiert wird. Es möge jeder Leser in einem Stochastik-Buch selbst weiterlesen z.B. in [6].

Berechnen wir nun Erwartungswert und Varianz der Lösung, dann finden wir

$$\begin{aligned}
E[x] &= E[(A^T A)^{-1} A^T b] = (A^T A)^{-1} A^T E[b] \\
Var[x] &= E[(A^T A)^{-1} A^T (b - E[x])(b - E[x])^T A(A^T A)^{-1}] \\
&= (A^T A)^{-1} A^T E[(b - E[x])(b - E[x])^T] A(A^T A)^{-1} \\
&= (A^T A)^{-1} A^T \sigma^2 \mathbf{1} A(A^T A)^{-1} = (A^T A)^{-1} \sigma^2
\end{aligned}$$

6.3 Lineare Ausgleichsprobleme und QR-Zerlegung

6.3.1 Zerlegungsvarianten

Man kann jedoch die Lösung von (43) finden, ohne die Matrix $A^T A$ explizit zu berechnen, was - wie wir an einem Beispiel schon gesehen haben - i.a. nicht zu empfehlen ist. Dafür nutzen wir die Matrixfaktorisierung in der Normalengleichung aus:

$$\begin{aligned} Px = A^TAx &= A^Tb \\ \Rightarrow R^TQ^TQRx &= R^TQ^Tb \\ \Rightarrow Rx &= Q^Tb \\ \Leftrightarrow Rx &=: b^* \end{aligned} \tag{44}$$

Alternativ kann man die QR-Zerlegung auch direkt in (39) vornehmen:

$$\begin{aligned} \min &= 1 \cdot \|Ax-b\|_2^2 = \|Q^T\| \cdot \|Ax-b\|_2^2 = \|Q^TAx - Q^Tb\|_2^2 \\ &= \|Rx - Q^Tb\|_2^2 = \|Rx-c\|_2^2 + \|d\|_2^2 \\ \Rightarrow & \quad Q^Tb = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \mathbb{R}^m \\ \in \mathbb{R}^{n-m} \end{matrix} \end{aligned}$$

An dieser letzten Darstellung kann man die hinreichende Optimierungsbedingung direkt ablesen. Denn da d aus den gemessenen Daten herrührt, wird das Minimum angenommen für

$$\|Rx-c\|_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Rx = c$$

Rückwärtseinsetzen liefert daher direkt die Lösung.

6.3.2 Numerische Beurteilung

Grundsätzlich hätten wir für unser Beispiel folgende Punkte abzuarbeiten:

1. Stabilität der QR-Zerlegung
2. Numerischer Aufwand der QR-Zerlegung
3. Kondition des Ausgleichsproblems
4. Numerischer Aufwand der Lösung des linearen Gleichungssystems (44)
5. Stabilität des Lösungsalgorithmus zu (44)

Wir wollen uns jetzt darauf beschränken, zu zeigen, wie lineare Ausgleichsprobleme auf Störungen reagieren:

Wir betrachten zunächst nur die Kondition von A, kümmern uns aber jetzt um den Fall, daß A nicht vollen Rang hat. Dafür bilden wir folgendes Beispiel:

1. In unserem Beispiel stehe $\Delta A(\epsilon)$ für das gestörte Problem und wir wählen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b^T = (1,0)$$
$$\text{und} \quad \Delta A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

2. Für die Kondition des gestörten Problems bekommen wir wegen

$$A^T = A \quad A^T A = A \quad A^+ = A$$
$$\Delta A(\epsilon)^T = \Delta A(\epsilon)$$
$$\Delta A(\epsilon)^T \Delta A(\epsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon^2 \\ \epsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\big(A + \Delta A(\epsilon)\big)^+ = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\epsilon^2} \\ \frac{1}{\epsilon^2} & -\frac{1}{\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

in Bezug auf die 2-Norm den Ausdruck

$$\frac{\|A^+ b + (A + \Delta A(\epsilon))^+ b\|}{\|A^+ b\|} = \Big(1 + \frac{1}{\epsilon}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

und jeder Leser möge das selbst nachrechnen. Man beobachtet zweierlei:

i) Der Rang der gestörten Matrix ist größer als der der ungestörten.

ii) Die Kondition ist für kleine ϵ extrem schlecht.

und i) ist offensichtlich der Grund für ii). Wir schließen daraus, daß der Rang einer Matrix zu den die numerische Lösbarkeit eines linearen Ausgleichsproblems dominierenden Faktoren gehört.

Eine ausführliche Untersuchung der Kondition des linearen Ausgleichsproblems, d.h. der Reaktion der Lösung auf Störungen in A und in b findet man in [8].

Bemerkung 12. *:*
Die QR-Zerlegung ist ein numerisch stabiles Verfahren. Es gibt andere, numerisch weniger günstige Lösungsverfahren linearer Gleichungssysteme z.B. das **Cholesky-Verfahren**.

7 Normalformen quadratischer Matrizen

Wir greifen nun ein ganz anderes Thema auf und erinneren noch mal an die erstaunliche Invarianzeigenschaft von Projektoren $P : V \to V$

$$\begin{aligned} &\forall v \in Im(P) : \quad P(v) = v \\ \Leftrightarrow \quad & P(v_\lambda) = \lambda v_\lambda \quad \lambda = 1 \end{aligned} \tag{45}$$

Gleichungen der Form (45) zeichnen λ als **Eigenwert** und v_λ als zu λ gehörigen **Eigenvektor** der Abbildung F aus. Man spricht auch von einer Eigenwertgleichung. Eigenwerte und Eigenvektoren gibt es nur von Endomorphismen und wir nennen $End(V)$ die Menge der Endomorphismen über V.

Bemerkung 13. *:*
Aus Gewohnheit schreiben wir von jetzt an für die Einheitsmatrix das Zeichen $\mathbf{1}$ *statt* E *wie bisher.*

Wir werden diese Invarianzeigenschaft jetzt weiterverfolgen und das charakteristische Verhalten von Endomorphismen auf bestimmten Unterräumen untersuchen. Diese Invarianzeigenschaften zu bestimmen bezeichnen wir als Normalformproblem. Das Normalformproblem betrifft im Grunde zwei Fragen:

a) Was kann man über einen Endomorphimus insgesamt wissen?

b) Basisrelativität: Welcher Endomorphismus steckt hinter welcher Matrix?

Es wird sich zeigen, daß man diese beiden Fragen mit Hilfe der Eigenwerte und der Eigenvektoren beantworten kann. Was wir also brauchen sind mathematische Aussagen, die es erlauben, in systematischer Weise Eigenvektoren und Eigenwerte eines Endomorphismus zu identifizieren.

Bemerkung 14. *:*
Das Konzept der Eigenwerte und Eigenvektoren kommt häufig vor: Z.B. ist die Exponentialfunktion die Eigenfunktion zum Eigenwert 1 der linearen Ableitungsfunktion.

Was also kann man spontan über Gleichungen des Typs (45) sagen? Klar scheint zu sein, daß niemals $v = 0$ Eigenvektor, aber sehr wohl $\lambda = 0$ Eigenwert der Abbildung F sein darf, denn:

a) da für lineare Abbildungen immer $0 \in Ker(F)$, wäre andernfalls wegen $F(0) = 0 = k \cdot 0$ jedes Körperelement k ein Eigenwert. □

b) die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ stellen offensichtlich eine Basis für $Ker(F)$ dar, weil die Matrixspalten die Abbilder der Urbildbasisvektoren sind. □
Folgerung: F kann mehrere numerisch verschiedene Eigenwerte haben, es muß aber nicht so sein, und folglich kann derselbe Eigenwert mehrere Eigenvektoren haben.

Außerdem können wir argumentieren, daß Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind. Wir demonstrieren das an einem Beispiel:

Seien $F(v_1) = \lambda_1 v_1$ und $F(v_2) = \lambda_2 v_2$ und wir nehmen an, sie seien linear abhängig. Dann folgt

$$\begin{aligned} \exists \mu \neq 0 : \quad & \lambda_1 \mu v_2 + \lambda_2 v_2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\lambda_1 \mu + \lambda_2) v_2 = 0 \end{aligned}$$

was nur von $v_2 = 0$ erfüllt werden kann, da höchstens ein Eigenwert 0 sein kann. Das aber widerspricht der Annahme, v_2 sei ein Eigenvektor. □

Wir haben uns damit eine mathematische Anschauung von Eigenwerten und Eigenvektoren beschafft und beschränken uns im Folgenden auf die Betrachtung von Endomorphismen F und damit auf quadratische Matrizen. Welchen systematischen Nutzen haben wir von der Untersuchung von Eigenwertgleichungen?

1. Wesentlich an Eigenwerten ist, daß sie durch eine Eigenwertgleichung eindeutig bestimmt werden. Denn für jedes $w = \mu v$ mit v als Eigenvektor erhält man unabhängig von der Wahl für λ sofort

   $$F(w) = F(\mu v) = \mu F(v) = \mu \lambda v = \lambda \mu v = \lambda w$$

   Diese Umformungen bedeuten nur, daß man zu gegebenem F und v genau ein λ bekommt, nicht aber, daß dieser Zusammenhang auch umkehrbar ist.

2. Angenommen wir können aus den Eigenvektoren von $F : V \to V$ eine Basis von V bilden. Dann gilt aufgrund von (3) und $F(v_i) = \lambda_i v_i \quad \forall i :$

   $$F \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \lambda_{nn} \end{pmatrix} \tag{46}$$

   weil die Eigenwerte eindeutig zu F gehören. (46) nennt man bekanntlich die **Diagonalform** der Matrix A zu F.

Damit haben wir offenbar eine Antwort auf die Frage in Aussicht, welche Matrix welche lineare Abbildung ausführt: Kann man die Eigenvektoren als Basis von V wählen, dann ist die Diagonalform der Matrix charakteristisch für die lineare Abbildung. Daher nennt man (46) auch die Normalform von A zu F. Wir definieren somit:

Definition 20. *:*
Sei $F : V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann heißt F diagonalisierbar gwd es eine Basis $\mathcal{B}$ von Eigenvektoren von F gibt derart, daß die Matrix von F Diagonalform hat.

Daher haben wir folgendes Untersuchungsprogramm vor uns:

1. Ist jede lineare Abbildung F diagonalisierbar? (Nein!)

2. Gibt es ein Verfahren, mit dem man die Frage der Diagonalisierbarkeit von F entscheiden und die Diagonalform von A erzeugen kann? (Ja!)

3. Was tun, wenn F nicht diagonalisierbar ist? (Wenn F trigonalisierbar ist, dann Jordansche Normalform, sonst Singulärwertzerlegung)

Wir müßten jetzt die bisher dargestellte Normalformproblematik sauber in die Sprache der Matrizen übertragen. Wir sparen uns dies, da wir wissen, daß Matrizen eindeutige Repräsentanten von **Homomorphismen** sind und werden schlampig von der Diagonalisierbarkeit von Matrizen und ihren Eigenwerten reden.

> Damit können wir unser gegenwärtiges Unternehmen, F zu identifizieren, auch so formulieren, daß wir nach der Menge der Eigenwerte von A suchen mit dem Ziel, wesentliche Informationen über F zu sammeln. Wir werden sehen, daß man viele Eigenschaften von F aus dem Spektrum gewinnen kann.

Doch bevor wir dem weiter nachgehen, notieren wir noch einige Definitionen, die bei den meisten Beispielen, in denen die Eigenwerttheorie Anwendung findet, ziemlich nützlich sind:

a) Die Menge der Eigenwerte $\sigma(A) := \{\lambda_1, -, \lambda_n\}$ heißt **Spektrum** von A.

b) Die Menge $\hat{\rho}(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ heißt **Resolventenmenge** und die im Fall $\lambda \in \hat{\rho}(A)$ existierende Matrix $(A - \lambda \mathbf{1})^{-1}$ heißt **Resolvente**.

c) $\rho(A) := \max\{|\lambda| \in \sigma(A)\}$ ist der **Spektralradius** von A.

d) Ist $\Re(\lambda)$ der Realteil von λ, dann wird die **Spektralabzisse** von A gegeben durch

$$\nu(A) := \max_{\lambda \in \sigma(A)} \Re(\lambda)$$

7.1 Diagonalform

Es sieht so aus, als wären wir jetzt primär an der Konstruktion einer Basis von V interessiert, mit deren Hilfe wir wesentliche Merkmale von $F \in End(V)$ direkt an der quadratischen Matrix A ablesen können. Das ist zwar richtig, stellt aber nur die halbe Wahrheit dar.

7.1.1 Etwas Gehirn investieren

Zusätzlich kann man zeigen, daß manche $F \in End(V)$ ihrem Vektorraum V eine geometrische Struktur aufprägen, wenn es in V F-invariante Unterräume gibt, die eine Basis von V bilden.

Definition 21. *: Sei U ein Unterraum und F ein Endomrphismus. Dann heißt U F-invariant gdw gilt*

$$F(U) \subseteq U$$

Zwar meint 'Konstruktion einer Basis' nichts anderes, als daß wir uns in systematischer Weise eine Basiswechselmatrix zusammenhäkeln wollen. Doch diese Basiswechselmatrix muß gerade so ausfallen, daß die Basis, bzgl. der wir die Matrix A von F hinterher hinschreiben, diese F-invarianten Unterräume von V offenlegt sowie das Spektrum von F beschafft. Beides zusammen ist die Lösung des Normalformproblems für quadratische Matrizen und liefert ein Identitätskriterium für F.

> Daß man mit der Diagonalform von A zu $F \in End(V)$ ziemlich einfach rechnen kann, d.h. sich die Komplexität des Problems reduziert hat, ist ein für praktische Zwecke wichtiger Effekt, aber nicht der leitende mathematische Gedanke bei der Diagonalisierung von Matrizen.

7.1.2 Schritt 1: Das charakteristische Polynom

Aus welchem Grund benötigt man das charakteristische Polynom? Wir haben noch keine Möglichkeit, die Eigenwerte eines Endomorphismus zu berechnen. Das wollen wir ändern und geben zu diesem Zweck die

Definition 22. *:*
Ist $F \in End(V)$ und A seine darstellende Matrix, dann heißt

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) \tag{47}$$

das charakteristische Polynom von A.

Daß (47) ein **Polynom** ist, liegt - wie jeder selbst nachrechnen kann - am Entwicklungssatz von Laplace. Wir bekommen i.a. daher

$$\det(A - \lambda \mathbf{1}) = \sum_i a_i \lambda^{k_i} \tag{48}$$

Dieser Ausdruck wird bestimmt durch zwei Größen: Die Koeffizenten des Polynoms und dessen Grad . Denn es gilt das

Lemma 4. *:*
Zwei Polynome $f(x)$ und $g(x)$ sind gleich gdw sie die gleichen Koeffizienten über einem beliebig vorgegebenem Körper $K[x]$ haben.

Beweis als Übung. Unter dem Grad eines Polynoms verstehen wir folgendes:

Definition 23. *:*
Sei $K[x]$ ein Körper und $p(x)$ ein Polynom über diesem Körper, d.h.

$$p(x) = \sum_{k=i}^{n} a_k x^k$$

Dann heißt $n \in \mathbb{N}_0$ der **Grad** *$grad(p) = n$ von $p(x)$ und wir setzen für das Nullpolynom o, bei dem alle Koeffizienten verschwinden, fest: $grad(o) = -\infty$.*

Stellt sich heraus, daß (48) für gewisse Werte von λ verschwindet, dann sagen uns die Eigenschaften der Determinante, daß es in der Matrix $A - \lambda \mathbf{1}$ linear abhängige Zeilen gibt, was nur daran liegen kann, daß sich A durch Äquivalenzumformung auf die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

bringen läßt. Also sind die Nullstellen von $p_A(\lambda)$ gerade die Eigenwerte von F bzw. von A. Diesen wichtigen Sachverhalt können wir auch ausdrücken durch den folgenden

Satz 7. *: Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus und λ ein Körperelement. Dann sind äquivalent:*

$$\begin{aligned} & F(v) = \lambda v \\ \Leftrightarrow \quad & (F - \lambda\mathbf{1})(v) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & Ker(F - \lambda\mathbf{1}) \neq \{0\} \\ \Leftrightarrow \quad & Im(F - \lambda\mathbf{1}) \neq V \\ \Leftrightarrow \quad & rang(A - \lambda\mathbf{1}) < \dim(V) \\ \Leftrightarrow \quad & \det(A - \lambda\mathbf{1}) = 0 \end{aligned}$$

d.h. $F - \lambda\mathbf{1}$ ist nicht injektiv. Die Gültigkeit dieser Äquivalenzumformungen sollte jeder Leser nachvollziehen können. Andernfalls sollte man noch mal vorn anfangen zu lesen.

7.1.3 Wieder etwas Gehirn

Was hat uns das gebracht im Hinblick auf unserer Normalformproblem? Wir haben in dem Spektrum von $F \in End(V)$ wesentliche Informationen über F vermutet. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms können nun aber sicher nur dann mit dem Spektrum identisch sein, wenn gilt

Lemma 5. *: Die charakteristischen Polynome ähnlicher Matrizen sind gleich.*

Das kann man sofort elementar nachrechnen. Sei dafür $B = SAS^{-1}$. Dann:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda\mathbf{1}) &= \det(SAS^{-1} - \lambda\mathbf{1}) = \det(SAS^{-1} - S\lambda\mathbf{1}S^{-1}) \\ &= \det(S(A - \lambda\mathbf{1})S^{-1}) = \det(S)\det(A - \lambda\mathbf{1})\det(S^{-1}) \\ &= \det(S)\det(S^{-1})\det(A - \lambda\mathbf{1}) = \det(SS^{-1})\det(A - \lambda\mathbf{1}) \\ &= \det(\mathbf{1})\det(A - \lambda\mathbf{1}) = 1 * \det(A - \lambda\mathbf{1}) \quad \square \end{aligned} \tag{49}$$

Mit anderen Worten: Das charakteristische Polynom einer Matrix A ist immer dasselbe unabhängig davon, welche Basen bei der Darstellung von A gewählt werden. Eigenwerte sind daher invariant unter Basiswechsel, d.h. affine Invariante: Ähnliche Matrizen haben wegen (49) auch dieselben Eigenwerte.

Bemerkung 15. *Der Leser möge sich erinneren:*

- *Matrizen sind äquivalent gdw sie bzgl. verschiedener Basen dieselbe lineare Abbildung darstellen.*
- *Quadratische Matrizen sind ähnlich gdw sie bzgl. verschiedener Basen denselben Endomorphismus darstellen.*

Daraus folgt, daß Eigenwerte charakteristisch sind für eine Äquivalenzklasse von ähnlichen Matrizen. Wir wissen allerdings noch nicht, ob dieser durch das Spektrum eindeutig identifizierten Äquivalenzklasse ähnlicher Matrizen auch genau eine lineare Abbildung zugeordnet ist. Wir werden sehen, daß das nicht so einfach ist.

Ist nun $p_A(\lambda)$ für genau ein bestimmtes F charakteristisch, d.h. wird genau ein $p_A(\lambda)$ genau einem F eindeutig zugeordnet? Nein! Wir betrachten dafür folgendes Beispiel:

- Die identische Abbildung im $\mathbb{R}^2$ hat die Matrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anstelle des Laplaceschen Entwicklungssatzes führen wir die **Sarrusregel**

Für $n = 2$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Abbildung 12: Sarrusregel im $\mathbb{R}^2$

im $\mathbb{R}^2$ aus. Das liefert für das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda\mathbf{1}) = (\lambda - 1)^2 \tag{50}$$

und den 2-fachen Eigenwert $\lambda = 1$.

- Die Scherung im $\mathbb{R}^2$ hat die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ und dem Eigenwert $\lambda = 1$ mit $\mu(F, \lambda) = 2$. □

Das charakteristische Polynom trägt also seinen Namen insofern zu Unrecht, als daß es nicht je zwei verschiedene lineare Abbildungen voneinander unterscheidet. Für eine Identifizierung der linearen Abbildung genügen die Eigenwerte daher nicht. Der durch das Spekrum festgelegten Äquivalenzklasse ähnlicher Matrizen ist folglich mehr als eine lineare Abbildung zugeordnet. Wir werden sehen, was sich ändert, wenn man zusätzlich die Eigenvektoren betrachtet.

7.1.4 Schritt 2: Nullstellen des charakteristischen Polynoms

Das Bisherige nützt uns nichts, wenn wir nicht die technischen Fragen lösen: Wie berechnet man die Nullstellen eines Polynoms und was heißt es überhaupt, die Nullstellen von

$$\det(A - \lambda\mathbf{1}) = \sum_i a_i \lambda^{k_i}$$

zu berechnen? Wir können bereits verstehen, daß hinter diesen Fragen Fragen nach Eigenschaften von Endomorphismen stecken, die wir mit Hilfe von Polynomen zu beantworten versuchen. Das kann nichts anderes bedeuten, als daß wir mehr über Polynome als wesentliche Hilfsmittel wissen müssen. Und das werden wir auch.

Wir kümmern uns nun um die Existenz und die Berechnung der Nullstellen von Polynomen. Dazu sind einige technische Vorbereitungen nötig: Mit den üblichen Rechenregeln findet man schnell heraus, daß

Satz 8. *: Ringstruktur über $\mathbb{R}$*
Die Menge $\mathcal{P}_m$ der Polynome $p(x)$ m-ten Grades über $\mathbb{R}$ bildet einen **kommutativen Ring** *mit Eins, aber keinen Körper. Daher bleibt bei der Polynomdivision manchmal ein Rest.*

Letzteres können wir auch direkt einsehen. Dazu beweisen wir das folgende

Lemma 6. *: Division mit Rest*
Seien $f(x), g(x) \in \mathcal{P}_m$ über irgendeinem vorgegebenen Körper $K[x]$ und $g(x) \not\equiv o$. Dann existieren $s(x), r(x) \in \mathcal{P}_m$ derart, daß

$$f(x) = s(x) \cdot g(x) + r(x) \text{ und } grad(r) < grad(g) \tag{51}$$

Wir unterscheiden zum Beweis zwei Fälle:

a) $grad(p) < grad(g)$: Um (51) zu erfüllen, setzen wir $s(x) \equiv o$.

b) $grad(p) > grad(g)$: Induktion über $grad(p)$
Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Im Induktionsschluß schreiben wir

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \quad \wedge \quad g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x^j$$

Dann ist $h(x) := p(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$ vom $grad(h) < grad(p)$. Deshalb gilt von $h(x)$ die Induktionsannahme, d.h. $h(x) = s(x)g(x) + r(x)$. Einsetzen liefert

$$p(x) = (a_n b_m^{-1} x^{n-m} - s(x)) \cdot g(x) + r(x) \quad \square$$

Die **Polynomdivision**, das Verfahren zur Berechnung der Nullstellen, läuft daher wie folgt:

i) scharf hinsehen und 1. Nullstelle $p(c) = 0$ von $p(\lambda)$ raten

ii) durch Polynomdivision diese Nullstelle ausklammern, d.h. man muß einen Ausdruck der Form

$$p(\lambda) = (\lambda - c) \cdot g_1(\lambda)$$

erzeugen. Dafür versucht man durch

$$p(\lambda) - const \cdot (\lambda - c)$$

die jeweils höchste Potenz des verbliebenen Polynoms zu beseitigen und dabei erniedrigt sich der Grad des Polynoms $g_1(\lambda)$ um 1 im Vergleich zum Grad von $p(\lambda)$. Dabei ist

iii) wieder scharf hinsehen und 1. Nullstelle c von $g_1(\lambda)$ raten etc.

Bemerkung 16. *:*
Ist man auf analytische Mittel beschränkt, so kann man für praktische Aufgaben eigentlich nur das Verfahren der Polynomdivision verwenden.

Die Anwendung der Polynomdivision liefert uns eine Aussage darüber, was es formal für ein Polynom heißt, eine seiner Nullstellen zu identifizieren.

Satz 9. *: Ist c eine Nullstelle des Polynoms $p(x)$, dann gibt es ein Polynom $g(x)$ derart, daß*

$$p(x) = (c - x) \cdot g(x)$$

Denn Division von $p(x)$ durch $(c - x)$ bedeutet

$$p(x) = (c - x)g(x) - r(x) \quad \Rightarrow \quad 0 = p(c) = -r(x) \quad \Rightarrow \quad r(x) = 0$$

was gerade zu zeigen war. Daraus und aus (51) ergibt sich sofort die wichtige Folgerung:

Satz 10. *: Ist $p(x) \in \mathcal{P}_k$, dann hat $p(x)$ höchstens k Nullstellen in $K[x]$. Ist aber $p(\alpha) = 0$ für unendlich viele α, dann ist $p(x) \equiv o$.*

Unabhängig davon, ob eine konkretes Polynom nun Nullstellen hat oder nicht - können dem Resultat vertrauen? Welche Information liefert das Faktorisieren eines Polynoms? Es wird bei unserem charakteristischem Polynom sicher vorkommen, daß ein λ als Nullstelle mehrfach vorkommt wie z.B. in (50). In diesem Fall sagen wir

Definition 24. *: Ist λ k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_A(\lambda)$, dann ist*

$$\nu(F, \lambda) = \max_r = \{r \in \mathbb{N} : p(\lambda) = (t - \lambda)^r \cdot g(\lambda)\}$$

die algebraische Vielfachheit von λ. $g(\lambda)$ ist natürlich wieder ein Polynom.

Sind die Nullstellen und die Vielfachheiten nun eindeutig? Ja, denn es gilt das

Lemma 7. *: Wenn ein Polynom $p(x)$ die Darstellung hat*

$$p(x) = \alpha \cdot (x - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_n)^{\nu_n} \tag{52}$$

mit $\alpha \in K$, dann ist diese Darstellung eindeutig bis auf die Reihenfolge der Polynome auf der rechten Seite.

Definition 25. *:*
Ein Polynom heißt **normiert** *gdw der Koeffizient mit dem größten Index den Betrag 1 hat und* **irreduzibel** *gdw aus $p(x) = g(x)h(x) \Rightarrow g(x) \equiv 1$.*

Beweis: In der rechten Seite von (52) ist jedes λ_i eine Nullstelle von (52). Ist λ umgekehrt eine beliebig vorgegebene Nullstelle von (52), dann gibt es genau ein i derart, daß $\lambda - \lambda_i = 0$. Daher sind die Nullstellen von (52) durch (52) eindeutig bestimmt.
Zwei Darstellungen von (52) könnten sich daher höchstens in den ν_i unterscheiden. Doch das tun sie nicht. Denn gilt für zwei Polynome $g_1(\lambda) \neq 0$ und $g_2(\lambda) \neq 0$ die Bedingung $m \neq s$ sowie

$$\begin{aligned}(x - \lambda)^s \cdot g_1(x) &= (x - \lambda)^m \cdot g_2(x) \\ (x - \lambda)^{m-s} \cdot g_1(x) - g_2(x) &= 0\end{aligned}$$

dann bedeutet dies $(x - \lambda)^{m-s} = 0$ unabhängig von der Wahl von $x \Rightarrow g_2(\lambda) = 0$ im Widerspruch zur Annahme. $\Box$

Soweit unsere Antwort auf die Frage, was es heißt, die Nullstellen eines Polynoms zu berechnen: Es heißt, die Linearfaktoren zu bestimmen, in die das Polynom auf genau eine Weise zerfällt. Aber gibt es auch immer Nullstellen von Polynomen?

Dafür zitieren wir ohne Beweis die für praktische Zwecke wichtigen Sätze:

Lemma 8. *: **Existenzsatz über $\mathbb{R}$***
Jedes reelle Polynom mit ungeradem Grad hat mindestens eine Nullstelle. Relle Polynome mit geradem Grad müssen keine Nullstelle besitzen.

Satz 11. *: **Fundamentalsatz der Algebra***
Die Menge der Polynome über $\mathbb{C}$ bildet einen Körper. Das bedeutet, daß jedes Polynom mit dem Grad $grad(p) = n$ über dem Körper $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle hat. $\Rightarrow$ Jedes solche Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Deshalb bezeichnet man $\mathbb{C}$ auch als algebraisch abgeschlossen.

Offensichtlich spielt die Zahlenmenge, die wir bei der Matrix zugrunde legen, eine wichtige Rolle für die Eigenschaften der Funktion - ein Sachverhalt, der wesentlich öfter zu beobachten ist, als man auf den ersten Blick annimmt.

Also: $p_A(\lambda)$ faktorisiert immer, wenn die Einträge der Matrix A komplex sind. Sind sie reell, dann kann man A nur dann auf Diagonalform bringen, wenn A symmetrisch ist, d.h. $A = A^T$ gilt. Den Grund dafür können wir im Moment noch nicht einsehen, wir merken uns aber wieder, daß es so ist.

7.1.5 Schritt 3: Eigenvektoren berechnen

Wir versuchen, weitere Informationen über den Endomorphismus zu erhalten und erinnern zunächst daran, daß alle Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ im $Ker(F)$ liegen und da infolge der Tatsache, daß für $F \in End(V)$ die Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(Im(F)) + \dim(Ker(F))$$

gilt, müssen wir damit rechnen, daß ein Eigenwert z.B. $\lambda = 0$ mehrere Eigenvektoren hat, weil sicher viele $F \in End(V)$ nicht injektiv sind. Wir müssen dies präzisieren.

Definition 26. *:*
Ein Eigenraum zum Eigenwert λ von $F \in End(V)$ wird gegeben durch

$$Eig(\lambda, F) := Ker(F - \lambda\mathbf{1}) \supset 0 \tag{53}$$

Aufgrund dieser Definition glauben wir ohne weiteren Beweis das

Lemma 9. *:*
Jeder Eigenraum von F ist ein Unterraum und nur für $\lambda = 0$ ist der Eigenraum der Kern von F.

Die Eigenvektoren eines diagonalisierbaren $F \in End(V)$ zu berechnen, läuft nach (53) darauf hinaus, für jeden der k Eigenwerte λ_k ein Gleichungssystem der Form

$$(A - \lambda_k\mathbf{1})v = 0$$

in v zu lösen. Das ist weiter kein Problem, aber es kann passieren, daß man einige der v_i aus $v = (v_1, -, v_n)$ frei wählen kann.
In diesem Fall muß man das **Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt** benutzen, um eine Basis aus paarweise orthogonalen Eigenvektoren zu konstruieren und damit die Basiswechselmatrix T angeben zu können.

Die grundsätzlich Idee dieses Verfahren ist es, daß sich eine Menge paarweise orthogonaler Vektoren $\{u_1, -, u_{k+1}\}$ aus einer beliebig vorgegebenen Menge $\{v_1, -, v_k\}$ gemäß der Iteration

$$\begin{aligned} u_1 &:= v_1 \\ u_{k+1} &:= v_{k+1} - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \langle v_{k+1}, u_j \rangle u_j \end{aligned}$$

konstruieren läßt. Es möge jeder Leser selbst unter diesem Stichwort noch einmal nachschlagen.

7.1.6 Schritt 4: Vielfachheiten

Wir wollen immer noch für V eine gewisse Basis $\mathcal{B}$ angeben bzgl. sich der Endomorphismus in charakteristischer Weise verhält, und die Basiswechselmatrizen dazu errechnen. Es geht also wieder darum, eine technische Frage zu lösen und die Lösung wird darüber entscheiden, ob die einen Endomorphismus eindeutig einer Matrix zuordnen können oder nicht.

Dafür konstruieren wir jetzt einen Zusammenhang zwischen einer direkten Zerlegung von V und den Eigenvektoren von F. Dieser Zusammenhang wird durch die bei der Diagonalisierung von Matrizen auftretenden Vielfachheiten vermittelt.

Definition 27. *: Sei $Eig(\lambda, F)$ gegeben. Dann ist*

$$\mu(\lambda, F) := \dim(Eig(\lambda, F))$$

die geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

Lemma 10. *:*
Offensichtlich ist infolge der Eigenwertgleichung $F(v) = \lambda v$ die Ungleichung

$$1 \leq \mu(\lambda, F) \leq \nu(\lambda, F)$$

eine wahre Aussage.

Der Schlüssel zur Konstruktion der gesuchten Basiswechselmatrizen liegt nun in folgendem

Satz 12. *: Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Da Eigenvektoren Unterräume sind, ist der Satz bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$Eig(\lambda_i, F) \cap Eig(\lambda_j, F) = \emptyset \quad \forall i, j \tag{54}$$

Dafür betrachten wir gemäß (53) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} F(v) &= \lambda_j v \\ F(v) &= \lambda_i v \end{aligned}$$

und versuchen eine gemeinsame Lösung v zu finden. Es zeigt sich für paarweise verschiedene Eigenwerte λ_j, λ_i :

$$0 = F(v) - F(v) = (\lambda_j - \lambda_i)v \quad \Rightarrow \quad v = 0$$

weil höchstens ein Eigenwert gleich 0 sein kann. □

Daraus ziehen wir sofort die wichtige Folgerung:

Lemma 11. *:*
Sei T eine Matrix, deren Spalten nur aus Eigenvektoren v_i der Länge 1 bestehen. Dann kann man $T^T T$ auch so aufschreiben:

$$T^T T = \begin{pmatrix} \boxed{\quad v_1^t \quad} \\ \boxed{\quad v_2^t \quad} \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{v_2} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v_1^t, v_1 \rangle & \langle v_1^t, v_2 \rangle & \dots \\ \langle v_2^t, v_1 \rangle & \langle v_2^t, v_2 \rangle & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

d.h. $T^T T = \mathbf{1}$, so daß T eine orthogonale Matrix ist. Denn (54) ist genau dann erfüllt, wenn $\langle v_i . v_j \rangle = 0$. □

Bemerkung 17. *:*
Wir verstehen jetzt die Tatsache, daß die Matrix Q aus der QR-Zerlegung orthogonal ist, so daß $\|Q\| = 1$: Die Spalten von Q sind nach der Konstruktion in (37) paarweise orthogonal.

Das genügt uns, um den gesuchten Zusammenhang zwischen einer direkten Zerlegung des Vektorraums V und den Eigenvektoren von $F : V \to V$ anzugeben.

Betrachten wir Matrizen, deren charakteristisches Polynom $p_A(\lambda)$ faktorisiert.

i) Dann haben wir für eine $(n \times n)$-Matrizen k verschiedene Eigenwerte λ_k und $1 \le k \le n$.

ii) Da $p_A(\lambda)$ für $(n \times n)$-Matrizen ein Polynom n-ten Grades liefert und ein solches Polynom höchstens n Nullstellen hat, gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \nu(\lambda_j, F) = n \tag{55}$$

weil F nach Voraussetzung durch eine Matrix dargestellt wird, deren charakteristisches Polynom faktorisiert.

ii) Gilt nun $\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F)$ für jeden einzelnen Eigenwert, dann folgt wegen (55) sofort

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(\lambda_j, F) = n$$

Da $F \in End(V)$, bedeutet dies aber gerade, daß die Eigenräume von F eine direkte Zerlegung von V darstellen und da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, stellen wegen

$$\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F) \quad \forall k \tag{56}$$

die Eigenvektoren eine Basis von V dar. □

Das ist das wesentliche Resultat für diagonalisierbare Matrizen und zugleich ein weiteres Kriterium für Diagonalisierbarkeit. Man kann daher nicht allein am charakteristischen Polynom ablesen, ob A diagonalisierbar ist. Das leistet erst das Minimalpolynom.

Machen wir uns nochmal klar was wir damit herausgefunden haben: Wir wissen nun, daß sich ein Endomorphismus auf seinen Eigenräumen in charakteristischer Weise verhält, nämlich

$$F \text{ ist bijektiv} \quad \Leftarrow \quad F(v) = \lambda v \quad \Rightarrow \quad F - \lambda \mathbf{1} \text{ ist nicht injektiv} \tag{57}$$

d.h. Eigenräume sind F-invariante Unterräume. Und wir wissen, daß wir unter der Bedingung $\forall k : \mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F)$ den Vektorraum der Selbstabbildung F eindeutig in Eigenräume disjunkt zerlegen können. Können wir unter diesem Bedingungen genau eine darstellende Matrix für F angeben, so haben wir unser Identitätsproblem gelöst. Dazu formulieren wir das formale Resultat in einem

Satz 13. *: Sei F ein Endomorphismus und seine darstellende Matrix A sei diagonalisierbar. Dann sind äquivalent:*

i) Der Vektorraum V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von F.

ii) $\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F) \quad \forall k$

iii) Der Vektorraum V besitzt eine direkte Zerlegung in Eigenräume zu Eigenwerten von F, d.h.

$$V = Eig(\lambda_1, F) \oplus ... \oplus Eig(\lambda_k, F) \tag{58}$$

Denn offensichtlich können wir die o.g. Argumentation auch in umgekehrter Richtung durchlaufen. Eigenvektoren sind ebenfalls affine Invariante eines Endomorphismus $F \in End(V)$.

Bemerkung 18. *:*
Sind $\nu(\lambda_k, F)$ nach dem Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt konstruierte Vektoren auch Eigenvektoren zu dem betrachteten Eigenwert, dann ist A diagonalisierbar. Andernfalls ist die Schlüsselbedingung $\forall k : \mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F)$ verletzt.

Die gesuchten Basiswechselmatrizen T und T^{-1} können wir jetzt sofort angeben, da wir mit den Eigenwerten und den Eigenvektoren die Lösungen aller Eigenwertgleichungen kennen: In jeweils einer Dimension schreiben wir

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_1 v_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wir können diese Zeilen auch zusammenfassen und in Matrixschreibweise überführen und dabei die Tatsache ausnutzen, daß die Eigenvektoren im Fall $\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F) \quad \forall k$ paarweise senkrecht aufeinander stehen:

$$AT = \text{diag}(A)T \quad \Rightarrow \quad T^T AT = \text{diag}(A) \tag{59}$$

(59) ist nichts anders als die Lösung unseres Identitätsproblems. Das wollen wir uns nun genauer ansehen.

7.1.7 Mehr Gehirn

Hat uns der letzte Satz bei der Frage weitergeholfen, wie wir den von einer Matrix repäsentierten Endomorphismus identifizieren können? Er hat, denn Eigenräume sind nach der Eigenwertgleichung offensichtlich F-invariante Unterräume. Wir dürfen daher behaupten, daß die Diagonalisierung einer Matrix Informationen über F-invariante Unterräume bereitstellt.
Wir hoffen nun, daß diese Information genügt, um die identische Abbildung von der Scherung zu unterscheiden, so daß das Gegenbeispiel aus dem vorangegangenen Abschnitt verschwindet:

- Die identische Abbildung $\mathbf{1}$ im $\mathbb{R}^2$ hat die Matrix

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  mit dem charakteristischen Polynom $\det(\mathbf{1} - \lambda\mathbf{1})) = (\lambda - 1)^2$ und dem 2-fachen Eigenwert $\lambda = 1$. Die Eigenräume sind

  $$Eig(\lambda_1, \mathbf{1}) = (1, 0)^T$$
  $$Eig(\lambda_2, \mathbf{1}) = (0, 1)^T$$

- Die Scherung S im $\mathbb{R}^2$ hat die Matrix

  $$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  mit $p_S(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ und dem Eigenwert $\lambda = 1$ mit $\mu(F, \lambda) = 2$. Die Eigenräume sind

  $$Eig(\lambda_1, S) = (1, 0)^T$$
  $$Eig(\lambda_2, S) = (-1, 0)^T$$

Das bedeutet: Nicht schon die Eigenwerte identifizieren einen Endomorphismius, sondern man braucht zusätzlich die F-invarianten Unterräume, d.h. man braucht für die eindeutige Zuordnung den kompletten Satz Lösungen aller Eigenwertgleichungen. $Leftrightarrow$ (59) löst unser Identitätsproblem.

Folgerung: Das geometrische Problem der Identifikation der F-invarianten Unterräume derart, daß $F \in End(V)$ seinem Vektorraum V eine geometrische Struktur aufprägt, kann auf algebraische Probleme, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms als Eigenwerte von A sowie gewisse Gleichungssysteme zu berechnen, zurückgeführt werden, denn die Eigenvektoren sind Lösungen der k Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_k \mathbf{1})v = 0$$

Die F-invarianten Unterräume anzugeben, bedeutet anschaulich, die Geometrie von F zu kennen, was - wie schon in (57) nichts anderes als der Grundgedanke zur gesamten Normalformproblematik darstellt.

7.1.8 Kriterien zur Diagonalisierbarkeit

Das Resultat unserer Anstrengungen lautet wie folgt: Sei A eine quadratische Matrix über dem Körper $K[x]$, die den Endomorphismus $F : V \to V$ ausführt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

i) A ist diagonalisierbar.

ii) A ist ähnlich zu genau einer Diagonalmatrix D, d.h. $A = TDT^T$. Die Reihenfolge der Eigenwerte in D kann frei gewählt werden und entspricht einem Umnummerieren der Basis.

iii) Der Vektorraum V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren von F.

iv) $p_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren und es ist $\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F) \quad \forall k$.

v) Der Vektorraum V besitzt eine direkte Zerlegung in F-invariante Unterräume zu Eigenwerten von $F \in End(V)$, d.h.

$$V = Eig(\lambda_1, F) \oplus ... \oplus Eig(\lambda_n, F) \tag{60}$$

vi) Der Endomorphismus $F : V \to V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ besitzt n paarweise verschiedene Eigenwerte.

Bemerkung 19. *:*
Weitere Kriterien der Diagonalisierbarkeit werden mit Hilfe des **Minimalpolynoms** *bereitsgestellt. Wer will, mag dem selbst einmal nachgehen.*

Der im Reellen sicher wichtigste Fall diagonalisierbarer Matrizen sind symmetrische Matrizen, die die Bedingung $A = A^T$ erfüllen. Wer sich für solche Matrizen interessiert, möge dem Thema 'Hauptachentransformation' einmal nachgehen und einen Blick in den Anhang werfen.

Zuletzt führen wir noch eine nützliche Sprechweise ein:

Definition 28. *:*
Sei A diagonalisierbar und P_i ein Projektor auf $Eig(\lambda_i, F)$. Dann hat A die **Spektraldarstellung***:*

$$A = \sum_i \lambda_i P_i$$

7.1.9 Ein Beispiel

Unsere Aufgabe lautet nun die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

zu diagonalisieren. Nach dem bisher Gesagten ergibt sich folgender Lösungsweg:

1. Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $p_A(\lambda)$. Mit Hilfe der Sarrusregel berechnen wir die Linearfaktoren, in die $p_A(\lambda)$ zerfällt:

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda\mathbf{1}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-2 \\ &= (-\lambda^2+1)(\lambda-3) = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-3) \\ &\Rightarrow \lambda_1=-1 \quad \lambda_2=-1 \quad \lambda_3=3 \end{aligned}$$

2) Die Eigenvektoren zu den Eigenwerte berechnen wir durch Lösung der Gleichungssysteme $(A-\lambda_i\mathbf{1})v_i = 0 \quad \forall i$ mittels Gaußscher Elimination. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &: v_1^T = (1,-1,0) \\ \lambda_2 &: v_2^T = (0,1,-1) \\ \lambda_3 &: v_3^T = (2,3,-1) \end{aligned}$$

3. Die Überprüfung der Schlüsselbedingung (56) ist erfolgreich. $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

4. Aufstellen der Transformationsmatrizen: Der i-te Eigenvektor ist die i-te Spalte der gesuchten Transformationsmatrix.

7.2 Schur-Normalform

Wir betrachten wieder nur solche Matrizen, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Was kann passieren? Zerfällt $p_A(\lambda)$ in Linearfaktoren, so kann man A auf

a) Diagonalform bringen, falls $\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F) \quad \forall k$.

b) Jordan-Normalform bringen, falls $\exists k: \quad \mu(\lambda_k, F) \neq \nu(\lambda_k, F)$.

Bemerkung 20. *:*
Zerfällt $p_A(\lambda)$ nicht in Linearfaktoren, so kann man A immer noch durch Singulärwertzerlegung auf eine Diagonalform bringen, was wiederum ein Spektrum und Informationen über F-invariante Unterräume liefert. Allerdings stehen dann auf der Hauptdiagonale die Quadratwurzeln der Eigenwerte von AA^T. Wir verschieben die Singulärwertzerlegung auf ein anderes Mal.

Den ersten Fall unter *a*) haben wir verstanden. Können wir im zweiten Fall Informationen über F-invariante Eigenräume gewinnen, um F zu identifizieren?

Ja, und die Lösung ist die Schur-Normalform. Dafür führen wir zunächst die neue Klasse der trigonalisierbaren Matrizen ein, die wir mit F-invarianten Unterräumen in Zusammenhang bringen können:

Definition 29. *:*
$F \in End(V)$ heißt trigonalisierbar gdw es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt derart, daß die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist. Entsprechend nennen wir A in diesem Fall trigonalisierbar.

Der Zusammenhang mit den F-invarianten Unterräumen wird in zwei Schritten hergestellt:

Satz 14. *: Sei $F \in End(V)$. Dann sind äquivalent:*

i) $F \in End(V)$ mit der darstellenden Matrix A ist trigonalisierbar.

ii) $p_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren.

Denn wenn A eine rechte obere Dreiecksmatrix ist, so muß nach dem Laplace'schen Entwicklungssatz $p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(a_{ii} - \lambda_i)^{\nu_i}$ gelten. Ist umgekehrt $p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}(a_{ii} - \lambda_i)^{\nu_i}$, dann hilft uns folgende Induktion nach dem Rang von A weiter:

i) Induktionsanfang: $n = 2$
Sei $p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda_1) \cdot g(\lambda)$ und $g(\lambda)$ ein Polynom.

- $\Rightarrow$ a_{11} ist der Wert einer Nullstelle von $p_A(\lambda)$.
- $\Rightarrow$ $a_{11} = \lambda_1$ ist Eigenwert von $F \Rightarrow \exists\ v_1 :\ F(v_1) = a_{11}v_1$
- $\Rightarrow$ Ergänzt man nun v_1 zu einer Basis $\mathcal{B} = \{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ von V, so hat die Matrix A nach (3) die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Wir definieren jetzt allgemeinen durch $span_K\{v_1, \dots, v_n\}$ die Menge aller Vektoren, die durch die linear unabhängigen Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ durch Linearkombination erzeugt werden. Dann ist $V_1 := span_K\{v_1\}$ und $W_2 := span_K\{\langle w_2, \dots, w_n\rangle\}$

$\Rightarrow V = V_1 \oplus W_2$. V_1 ist - wie wir wissen - ein F-invarianter Unterraum, W_n aber im allgemeinen nicht.

ii) Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $1 \leq k \leq n - 1$.

iii) Induktionsschluß: $(n - 1) \rightarrow n$
Betrachte nun die Matrix A_2, die aus A wie folgt hervorgeht:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{A_2} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Da $F_{|W}$ natürlich auch linear ist, kann man zusammensetzen:

$$F : W \rightarrow W = H(W) + G(W) \quad \text{mit}$$

$$\begin{array}{lcl} H :\ W \rightarrow V_1 & \text{und} & G :\ W_2 \rightarrow W_2 \\ H(w_j) = a_{1j}v_1 & & G(w_j) = a_{2j}w_2 + \dots + a_{nj}w_n \end{array}$$

Offensichtlich ist $p_A(\lambda) = (a_{11}-\lambda)\cdot p_{A_2}(\lambda)$. Daher kann man das Argument aus dem Induktionsanfang $(n-1)$-mal wiederholen, da man schon weiß, daß $p_A(\lambda)$ faktorisiert. Dies liefert die gewünschte obere rechte Dreicksform der Matrix A. $\square$

M.a.W.: Bringt man Matrizen trigonalisierbarer Endomorphismen auf die Gestalt einer rechten oberen Dreiecksmatrix, dann stehen auf der Hauptdiagonalen automatisch die Eigenwerte.
Doch der Satz sagt noch wesentlich mehr aus: Offenbar gibt es eine Beziehung zwischen dem Verhalten von F auf den Unterräumen von $\mathcal{F}$ und dem von $p_A(\lambda)$: $p_A(\lambda)$ faktorisiert genau dann, wenn man die lineare Abbildung F einschränkt auf einen Unterraum U, der F-invariant ist, d.h.

$$p_{A_{|U}}(\lambda)\cdot p_{A_{|U^c}}(\lambda) \quad \Leftrightarrow \quad F = F_{|U} + F_{|U^c} \tag{61}$$

Dabei ist U^c das **Komplement** von U und $A_{|U}$ sowie $A_{|U^c}$ die Matrizen der eingeschränkten Selbstabbildungen.

Bemerkung 21. *:*
Dasselbe Resultat liefert die QR-Zerlegung einer trigonalisierbaren Matrix. Ist man also sicher, daß $p_A(\lambda)$ faktorisiert, genügt schon die numerisch günstige QR-Zerlegung zur Berechnung der Eigenwerte.

Der zweite Schritt ergibt sich durch Folgerung aus dem ersten Schritt. Dafür definieren wir:

Definition 30. *Unter einer F-invarianten Fahne in einem n-dimensionalen Vektorraum V versteht man eine Kette $\mathcal{F}$*

$$\{0\} = V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

mit der Eigenschaft

$$F(V_r) \subseteq V_r \quad \forall r \in \{0,\ldots,n\}$$

Satz 15. *: Unter den Bedingungen des letzten Satzes gibt es eine F-invariante Fahne $\mathcal{F}$*

$$\{0\} = V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$$

mit der Eigenschaft

$$V_k = V_1 + W_{k-1}$$

Denn da $H(w) \in Eig(\lambda_1, F)$ F-invariant ist und gilt $w \in W_{k-1} \Rightarrow G(w) \in W_{k-1}$ nach Konstruktion von G, folgt

$$F(\mu v_1 + w) = \lambda_1\mu v_1 + H(w) + G(w) \subseteq V_1 + W_{k-1} \quad \forall w \in W_{k-1}$$

Folglich genügt die algebraische Eigenschaft des charakteristisches Polynom, vollständig zu faktorisieren, um die Existenz von F-invarianten Unterräumen auf der Basis von Eigenvektoren zu garantieren und man kann an $p_A(\lambda)$ ablesen, ob A auf Dreiecksgestalt gebracht werden kann. $\square$

Wie die Menge der diagonalisierbaren Matrizen, so zerfällt daher auch die Menge der triogonalisieren Matrizen in Äquivalenzklassen. Dafür definieren wir zunächst:

Definition 31. *Sei $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Gilt $U^{-1} = \bar{U}^T$ mit*

$$\bar{U} := \left(\bar{u}_{ij}\right)_{ij} := \left(x_{ij} - \sqrt{-1} \cdot y_{ij}\right)_{ij} \tag{62}$$

dann heißt U unitär.

Der folgende Satz besagt, daß jede Matrix über dem Körper $\mathbb{C}$ unitär ähnlich ist zu einer rechten oberen Dreicksmatrix.

Satz 16. *:*
Zu jedem $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es genau eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ derart, daß

$$U^H A U = R = D + N$$

Dabei ist R eine rechte obere Dreiecksmatrix, D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von A und N eine nilpotente Matrix. U kann immer so gewählt werden, daß die Eigenwerte in D in beliebig vorgegebener Reihenfolge auftreten. R heißt die Schur Normalform von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Bemerkung 22. *:*
Es gibt auch eine Schur-Normalform reller, quadratischer Matrizen. Das ist eine Ähnlichkeitstransformation auf **obere Hessenbergform** *H. Wer sich dafür interessiert, sei auf die Literatur z.B. [4] verwiesen.*

Wie bei diagonalisierbaren Matrizen haben A und R dasselbe Spektrum und dasselbe charakteristische Polynom sowie die gleichen Eigenvektoren. Die unitäre Transformationsmatrix errechnet sich durch

$$U = U_1 \cdot \ldots \cdot U_n$$

und U_j hängt vom Eigenvektor v_j zum Eigenwert λ_j ab:

$$U_j = \begin{pmatrix} 1 & & v_{1j} & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & v_{nj} & & 1 \end{pmatrix}$$

Wir können die hinter dieser Ähnlichkeitstransformation steckende Reduktion der Komplexität des Problems in Gestalt von A noch verbessern und bei dieser Gelegenheit aufklären, was eine nilpotente Matrix macht.

7.3 Jordan-Normalform

Wir betrachten wieder nur trigonalisierbare Matrizen A, d.h. wir beschränken uns auf algebraisch abgeschlossene Körper z.B. $K[x] = \mathbb{C}$ und suchen nach einer Normalform von A, die charakteristische Informationen über die F-invarianten Unterräume eines Endomorphismus bereitstellt. Diese Normalform ist die Jordansche Normalform von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Bemerkung 23. *:*
Es ist nicht ausgeschlossen, daß des Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, deren $p_A(\lambda)$ faktorisiert, ohne daß A diagonalisierbar ist. Für diese Matrizen ist ebenfalls die Jordansche Normalform einschlägig.

7.3.1 Nicht ohne Gehirn

Wir können bereits an dieser Stelle sehen, daß die Eigenschaften von Polynomen die des betreffenden Endomorphismus dominieren. Wir müssen daher die algebraischen Hilfsmittel weiter ausbauen, um tiefliegende Merkmale von Endomorphismen erkennen zu können. Dafür erzeugen wir zunächst eine Unterstruktur von Polynomringen:

Definition 32. *Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}$. Dann heißt $\mathcal{I}$ Ideal in $\mathcal{P}$ gdw*

i) $\mathcal{I} \neq \emptyset$

ii) $p(x) + q(x) \in \mathcal{I} \quad \forall p(x), q(x) \in \mathcal{I}$

iii) $p(x) \cdot q(x) \in \mathcal{I} \quad \forall p(x) \in \mathcal{I}, q(x) \in \mathcal{P}$

Die Einführung dieser Unterstruktur wird es erlauben, Aussagen über Äquivalenzklassen von Matrizen zu formulieren.

Satz 17. *:*
Sei $\mathcal{I}$ ein Ideal in $\mathcal{P}$. Dann gibt es einen Erzeuger $g(x) \in \mathcal{I}$ derart, daß

$$\mathcal{I} = g(x) \cdot \mathcal{P} = \{g(x)h(x)|h(x) \in \mathcal{P}\} \tag{63}$$

Unter allen Polynomen $\not\equiv o$ hat $g(x)$ minimalen Grad.

Ist $g(x)$ normiert, dann ist $g(x)$ sogar eindeutig bestimmt. Um das zu zeigen, unterscheiden wir wieder zwei Fälle:

a) Sei $\mathcal{I} \equiv \emptyset$. Dann ist $g(x) \equiv o$.

b) Sei $\mathcal{I} \not\equiv \emptyset$. Dann gibt es für beliebig vorgegebenes $h(x) \in \mathcal{I}$ nach (51) ein $g(x) \in \mathcal{I}$, daß unter allen Polynomen aus $\mathcal{I}$ den kleinsten $grad(g) > 0$ hat. Wegen (51) ist

$$h(x) = s(x) \cdot g(x) + r(x)$$

$r(x) = h - sg \in \mathcal{I}$, denn $\mathcal{I}$ ist ein **Ideal**. Wäre nun $r(x) \not\equiv o$ Dann müßte es in $\mathcal{I}$ ein Polynom $f(x)$ mit $grad(f) < grad(g)$ geben - im Widerspruch zur Annahme. Also: $0 = r(x) \in \mathcal{I}$ und das bedeutet $g(x) \cdot \mathcal{P} \in \mathcal{I}$. □ (Die Eindeutigkeit haben wir uns gespart.)

Damit können wir das nächste Lemma zeigen, der eine wesentliche Rolle spielen wird, bei der Ableitung der Jordanschen Normalform.

Lemma 12. *:*
Seien $i = 1, \ldots, n$ und Polynome $p_i(x) \in \mathcal{P}$ mit dem größten gemeinsamen Teiler $h(x)$ gegeben. Dann gibt es weitere Polynome $q_i(x) \in \mathcal{P}$ derart, daß

$$h(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x)q_i(x) \tag{64}$$

Denn wir können argumentieren:

i) Betrachte

$$\mathcal{I} := \Big\{ \sum_{i=0}^{m} p_i(x) u_i(x) | u_i(x) \in \mathcal{P} \Big\}.$$

Dann ist $\mathcal{I}$ ein Ideal. Beweis als Übung.

ii) Folglich gibt es einen Erzeuger des Ideals $w(x) \in \mathcal{I}$. Daraus folgt

$$\exists f_i(x) : p_i(x) = w(x) f_i(x)$$

Also ist $w(x)$ ein Teiler von $p_i(x)$ unabhängig von der Wahl von i und damit auch Teiler von $h(x)$. Das bedeutet $h(x) = w(x) h_1(x) \in \mathcal{I}$.

iii) Also ist

$$h(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x) q_i(x) \text{ für geeignete } q_i(x) \in \mathcal{I} \quad \Box$$

Wir werden diese Unterstruktur im Raum der Polynome in den folgenden Unterkapiteln als technisches Hilfmittel immer wieder benutzen.

7.3.2 Nilpotente Matizen

Bevor wir algebraische Eigenschaften von Polyomen mit geometrischen Eigenschaften von linearen Abbildungen verknüpfen, holen wir zunächst die Einführung der bei der Schurzerlegung bereits erwähnten nilpotenten Matrizen nach:

Definition 33. *: Eine Abbildung $F \in End(V)$ heißt k-stufig nilpotent gdw*

i) $F^k = 0$ *mit* $k \in \mathbb{N}$

ii) $F^j \neq 0$ *mit* $1 \leq j < k$

Entsprechend nennen wir die darstellende Matrix N von F nilpotent.

Was sollte man wenigstens über **nilpotente** Endomorphismen wissen?

Satz 18. *Sei $F \in End(V)$ und V endlich-dimensional über dem Körper $\mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent*

i) $F \in End(V)$ ist nilpotent.

ii) $p_A(\lambda) = \pm t^n$

iii) Es gibt eine Basis von V, so daß F dargestellt wird durch die nilponente Matrix

$$N = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Denn daß F k-stufig nilpotent ist, impliziert $\lambda = 0$ als einzigen Eigenwert. Um letzteres einzusehen, nehmen wir an

$$F(v) = \lambda v$$

Weil F k-stufig nilpotent ist nach Voraussetzung

$$\Rightarrow \quad F^k(v) = \lambda^k v = 0$$

Da 0 niemals Eigenvektor sein darf, folgt $\lambda = 0$ und zwar unabhängig vom Wert von λ. Daher ist $\lambda = 0$ auch der einzige Eigenwert. Das bedeutet $i) \Rightarrow ii)$. Anwendung der Schurzerlegung (62) liefert $ii) \Rightarrow iii)$ und - wie der Leser durch einfaches Nachrechnen sofort selbst zeigen kann - es gilt $iv) \Rightarrow i)$. $\square$

Als Nebenprodukt der Jordan-Normalform wird sich zeigen, daß die in der Schurzerlegung behauptete Zerlegung $U^H AU = R$ mit $R = D + N$ tatsächlich korrekt ist. M.a.W.: Die Menge der trigonalisierbaren Matrizen ist genau dieselbe wie die Menge der i.S.d. Jordan-Normalform ähnlichen Matrizen.

7.3.3 Das Minimalpolynom

Wir hatten das geometrische Problem der Identifikation der F-invarianten Unterräume durch Rückführung auf algebraische Probleme, i.e. die Berechnung der Nullstellen des charakteristischen Polynoms und die Lösung bestimmter Gleichungssysteme gelöst. Die Kenntnis von $p_A(\lambda)$ allein genügte jedoch lediglich, um zu beurteilen, ob A auf eine odere rechte Dreeicksform gebracht werden kann vgl. (62). Um die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus zu beurteilen, war zusätzlich die Berechnung der Eigenvektoren und die Überprüfung der Schlüsselbedingung (56), d.h. von

$$\mu(\lambda_k, F) = \nu(\lambda_k, F) \quad \forall k$$

erforderlich. Das ist zum Einen nicht sehr elegant und zum Anderen kann das für große Gleichungssysteme numerisch sehr unangenehm werden. Wir suchen daher nach einem 'algebraischen Ausweg'. Dieser wird eröffnet durch die

Definition 34. *Sei $F \in End(V)$, V endlich-dimensional sowie $p(x) \in \mathcal{P}_m$. Dann wird durch*

$$p(F) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i F^i \Leftrightarrow p(F) \in End(V) \tag{66}$$

ebenfalls ein Polynom gegeben.

Wie üblich kümmern wir uns zuerst um die Existenz und die Eindeutigkeit des unter (66) eingeführten mathematischen Objekts.

Satz 19. *:*
Sei $F \in End(V)$ und V endlich-dimensional über dem Körper $\mathbb{C}$. Dann existiert ein normiertes und vom Nullpolynom verschiedenes Polynom $m_F(x)$ mit den Eigenschaften

a) $m_F(F) = 0$

b) Ist $f(x) \in \mathcal{P}$ ein weiteres Polynom mit $f(F) = 0$, dann wird f von m_F geteilt, d.h. $f = m_A \cdot g$ und g ist wieder ein Polynom.

c) m_F ist auf diese Weise eindeutig bestimmt und heißt **Minimalpolynom**.

Ein wichtiges Beispiel für die Existenz eines Polynoms wie unter a) behauptet, liefert der im Anhang dargestellte und für das Verständnis des Verhaltens von Endomorphismen auf Unterräumen wichtige Satz von **Cayley-Hamilton**, den wir im Anhang diskutieren.

Was die Argumentation für a) und b) angeht, so nutzen wir wieder aus, daß

$$\mathcal{I} := \{f(x) \in \mathcal{P} | f(A) = 0\}$$

ein Ideal in $\mathcal{P}$ ist (Beweis als Übung). Dann ist wegen (63)

$$\mathcal{I} = g(x) \cdot \mathcal{P}$$

mit geeignet gewähltem $g(x)$. Durch Änderung der Elemente von $\mathcal{P}$ können wir immer eine Normierung von $g(x)$ sicherstellen, falls $g(x) \not\equiv o$. Daher erfüllt $m_F(x) := g(x)$ a) und b) $\Box$. Im Übrigen verweisen wir zum Beweis wieder auf einschlägige Bücher zur linearen Algebra z.B. [7].

Was hat man von der Betrachtung dieses besonderen Polynoms im Hinblick auf das Normalformproblem? Hier sind im wesentlichen drei Punkte anzuführen:

1. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt:

   a) m_F und p_A haben dieselben Nullstellen.

   b) m_F teilt p_A, sei sei denn p_A hat n paarweise verschiedene Nullstellen. In diesem Fall ist $m_F = p_A$.

   Beweis als Übung.

2. Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom. Zum Beweis vgl. [7].

3. Es wird eine Aussage über die geometrische Struktur erlauben, die ein Endomorphismus seinem Vektorraum aufprägt:

   Satz 20. *: Sei $F \in End(V)$, V endlich-dimensional und*

   $$m_F(x) := g_1(x) \cdot \ldots \cdot g_r(x) \in \mathcal{P}_m$$

   mit paarweise teilerfremden Faktoren $g_i(x)$. Dann gilt:

   $$V = \oplus_{i=1}^{r} \ker(g_i(F)) \tag{67}$$

Die Rolle dieser Punkte ist klar: Die ersten beiden sind notwendige Bedingungen, damit Eigenschaften von $m_F(x)$ für das Normalformproblem überhaupt relevant sein können. Der dritte Punkt drückt eine wesentliche Neuerung der Jordanschen Normalform gegenüber den bisherigen Normalformen aus: Während bisher die Eigenräume F-invariant waren, kommen jetzt neue Räume ins Spiel.

Wir beweisen als nächstes nur den wichtigen letzten Satz in drei Schritten:

1. Sei $h_i(x) := \prod_{j \neq i} g_j(x)$. Dann ist nach Voraussetzung bzgl. der Faktoren 1 der größte gemeinsame Teiler aller $h_i(x)$. Mit (64) folgt daraus

$$1 = \sum_{i=0}^{r} h_i(x) k_i(x)$$

für geeignet gewählte $k_i(x) \in \mathcal{P}_m$. Daraus folgt wiederum

$$v = \mathbf{1} v = \sum_{i=0}^{r} h_i(F) k_i(F) v \text{ für } v \in V$$

2. Als nächstes rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} g_i(F)[h_i(F)k_i(F)]v = k_i(F)[g_i(F)h_i(F)]v = k_i(F)m_F(F)v = 0 \\ \Rightarrow h_i(F)k_i(F) \in \ker(g_i(F)) \\ \Rightarrow V = \textstyle\sum_{i=1}^{r} \ker(g_i(F)) \end{aligned}$$

3. Es bleibt zu zeigen, daß diese Summe direkt ist. Setze dafür

$$\begin{aligned} U := \ker(g_i(F)) \cap \textstyle\sum_{j \neq i}^{r} \ker(g_j(F)) \\ \Rightarrow [g_i(F)]u = [h_i(F)]u = 0 \end{aligned}$$

für ein beliebig wählbares $u \in U$. Da die $g_i(x)$ nach Voraussetzung paarweise teilerfremd sind, folgt wegen (64)

$$\begin{aligned} \exists t_i(x), s_i(x) \in \mathcal{P} \text{ mit } 1 = t_i(x)g_i(x) + s_i(x)h_i(x) \quad \forall i \\ \Rightarrow o = [t_i(F)g_i(F) + s_i(F)h_i(F)]u = 1(F)u = u \quad \forall i \\ \Rightarrow V = \oplus_{i=1}^{r} \ker(g_i(F)) \qquad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 24. *:*
Die Jordanzerlegung wird unabhängig sein von diesem Satz, nicht aber die Jordansche Normalform.

7.3.4 Ein Beispiel

Wir betrachten irgendein Minimalpolynom

$$m_F(x) = \prod_{i=1}^{l} (x - \lambda_i)^{m_i}$$

Dann ist zu seiner Berechnung folgendes Lemma äußerst nützlich.

Lemma 13. *m_i ist die kleinste Zahl, für die gilt*

$$\ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i}] = \ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i + 1}]$$

Beweis als Übung. Wir rechnen jetzt noch ein Beispiel: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir üblich berechnen wir $p_A(\lambda) = (2-x)^3(5-x)$. Da m_F und p_A dieselben Nullstellen haben müssen, tritt $(5-x)$ mit der Vielfachheit 1 in m_F auf. Da m_F ein Teiler von p_A sein muß, gibt es nur zwei Möglichkeiten:

$$m_F = (x-2)^2(x-5) \quad \vee \quad m_F = (x-2)^2(x-5)$$

Da man aber mit dem o.g. Lemma nachrechnet

$$(A-2\mathbf{1})^2(A-5\mathbf{1}) = \{0\} \quad \Rightarrow \quad m_F = (x-2)^2(x-5)$$

7.3.5 Jordanzerlegung

Wie die Diagonalisierung beruht die Jordansche Normalform auf der Zerlegung von V in geeignete Unterräume, die sog. verallgemeinerten Eigenräume, die wir - ohne es wissen zu müssen - bereits in (67) betrachtet haben.

Definition 35. *:*
Sei $F \in End(V)$ und V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann wird durch

$$\ker[(F-\lambda_i\mathbf{1})^{\nu_i}]$$

der verallgemeinerte Eigenraum zu λ_i erklärt. Die Elemente verallgemeinerter Eigenräume heißen manchmal auch Hauptvektoren und die verallgemeinerten Eigenräume Haupträume.

Wir können eine disjunkte Zerlegung von V finden, indem wir auf gewissen Unterräumen von V nilpotentes Verhalten von F beobachten, um diese später als **verallgemeinerte Eigenräume** zu identifizieren. Genau diese Information stellt die Jordanzerlegung zur Verfügung.

Satz 21. *Sei $F \in End(V)$ und V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann gibt es Unterräume U_n und U_b mit den Eigenschaften*

i) $F(U_n) \subseteq U_n$ *und* $F(U_b) \subseteq U_b$

ii) *F beschränkt auf den Unterraum U_n, d.h. $F_{|U_n}$ ist nilpotent und $F_{|U_b}$ ist bijektiv.*

iii) $V = U_n \oplus U_b$

Dieser Satz enthält bereits das wesentliche Resultat in Bezug auf die Jordanzerlegung. Um das einzusehen, geben wir einen kurzen Beweis, der nicht von dem speziellen Wert der Indices i oder l abhängen wird.

Beweis zu i) :

α) Seien $U_i := Ker(F^i)$ und $U^i := Im(F^i)$ mit $i = 1, 2, \ldots$. Dann muß aufgrund der Definitionen von Kern und Bild gelten: $U^i \supseteq U^{i+1}$ sowie $U_i \subseteq U_{i+1}$, da F eine Selbstabbildung ist. Da $\dim(V) < \infty$ muß es Indizes k, l geben derart, daß $U_k = U_{k+1}$ bzw. $U^l = U^{l+1}$. Wähle nun den kleinsten Index l bzw. k aus, der dies erfüllt und definiere $U_b := U^{\min(l)}$ sowie $U_n := U_{\min(k)}$.

β) Für beliebig vorgegebenes $v \in U_n$ gilt damit:

$$F^k(F(v)) = F(F^k(v)) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(v) \in U_n$$

Betrachte nun $v \in U_b$. Dann ist für geeignet gewähltes w: $v = F^l(w)$. Daraus folgt wiederum:

$$F(v) = F(Im[F^l(w)]) = F^l(Im[F(w)]) \in U_b \quad \Rightarrow \quad F(v) \in U_b \quad \square$$

Beweis zu ii) :
Da mit den bisherigen Definition gilt: $F^k_{|U_n} = 0$ ist F k-stufig nilpotent auf U_n. Und da gilt

$$F(Im(F^l(v))) = \{F^{l+1}(v)|v \in U_b\} = Im(F^l(v))$$

ist F bijektiv auf U_b. $\square$

Beweis zu iii) :

α) Definiere nun $t := \max(k, l)$. Dann zerfällt ein beliebig vorgegebenes $v \in V$ in zwei Teile $F^t(v) \in U_b$ sowie $v - w \in Ker(F)^t$ und w kann bestimmt werden aus

$$F^t(U_b) = U_b \quad \Rightarrow \quad \exists! w \in U_b : F^t(v) = F^t(w).$$

Daraus folgt: $v = w + (v - w) \in U_b + U_n \quad \forall v \in V$.

β) Es bleibt zu zeigen, daß die Summe der Untervektorräume direkt ist. Sei also $v \in U_b \cap U_n$ beliebig vorgegeben. Dann muß $F^t(v) = 0$, weil $v \in U_n$. Ist F bijektiv auf U_b, dann auch auf $U_b \cap U_n$. $\Rightarrow v = 0$.

$$\Rightarrow \quad V = U_b \oplus U_n \qquad \square$$

Der Beweis dieses Satz zeigt, daß der Unterräume U_n und U_b, in die V direkt zerlegt wird, auf den min(k)-ten bzw. min(l)-ten Potenzen von F beruhen. Wir erwarten daher, daß wir einen Zusammenhang zwischen m_F und unserer Zerlegung finden können.

Um diesen Zusammenhang zu finden, überlegen wir uns, was passiert, wenn man den letzten Satz auf den Endomorophismus $F - \lambda\mathbf{1} \in End(V)$ für ein fest vorgegebenes λ anwendet?

i) Da ein algebraisch abgeschlossener Körper zugrunde liegt, bekommen wir durch die Abbildung eine direkte Zerlegung von V in F-invariante Unterräume:

$$V = U_b^\lambda \oplus U_n^\lambda \tag{68}$$

U_n^λ ist unserer gewohnter Eigenraum $Ker(F - \lambda\mathbf{1})$ zu F. Daher muß die Selbstabbildung $(F - \lambda\mathbf{1})$ bijektiv auf dem Komplement dieses Raums sein. Und da $F = (F - \lambda\mathbf{1}) + \lambda\mathbf{1}$, sind beide Unterräume F-invariant i.S.d. Definition und da $p_A(\lambda)$ faktorisiert $\Rightarrow Ker(F - \lambda\mathbf{1}) \neq o \Rightarrow U_n^\lambda \neq 0$. Es genügt daher, weiterhin F auf den richtigen Unterräumen zu betrachten.

ii) Wir beschränken daher F auf U_b^λ bzw. U_n^λ und wählen eine der Zerlegung (68) angepaßte Basis. Dann ist wegen (61)

$$p_A = p_{A_b^\lambda} \cdot p_{A_n^\lambda} \tag{69}$$

iii) Was hat dieses Verhalten zu tun mit dem Minimalpolynom $m_F(x)$? Wieder machen wir uns klar: $F_n^\lambda - \lambda\mathbf{1}$ ist k-stufig nilpotent, d.h.

$$p_A(F_n^\lambda - \lambda\mathbf{1}) = \sum_{i=0}^{k} \alpha(F_n^\lambda - \lambda\mathbf{1})^k = 0 \tag{70}$$

Eine Polynomdivision zeigt, daß das einzige normierte Polynom mit

$$m_{F-\lambda\mathbf{1}}(F - \lambda\mathbf{1}) = 0$$

daß (70) teilt, von der Gestalt $m_{F-\lambda\mathbf{1}}(x) = x^k$ ist. Daraus folgt

$$m_{F_n^\lambda} = (x-\lambda)^k$$

Wir haben also folgende Konsequenzen der Zerlegung (68) für unser Minimalpolynom:

α) $m_{F_n^\lambda}$ ist Teiler von $m_{F_n^\lambda} \cdot m_{F_b^\lambda}$.

β) Und da F_b^λ bijektiv ist auf U_b^λ hat F_b^λ keinen Eigenwert des Betrags λ. Da m_F und p_A dieselben Nullstellen haben $\Rightarrow$ $(x-\lambda)$ ist kein Teiler von $m_{F_b^\lambda}$.

γ) $\forall v \in U_n^\lambda : m_F(F) = 0$. Also ist $m_{F_n^\lambda} = (x-\lambda)^k$ Teiler von $m_F(F)$.

δ) $\forall v \in U_b^\lambda : m_F(F) = 0$. Also ist $m_{F_b^\lambda}$ Teiler von $m_F(F)$.

ϵ) Da $m_{F_n^\lambda}$ und $m_{F_b^\lambda}$ teilerfremd sind $\Rightarrow$

$$m_F(F) = m_{F_n^\lambda} \cdot m_{F_b^\lambda} \tag{71}$$

Der Leser möge sich klar machen, daß man die Argumentation auch in umgekehrter Richtung durchlaufen kann, wenn nur λ ein Eigenwert von F ist.

v) An (69) liest man direkt ab, daß

$$\nu_i(\lambda, F) = \dim(U_n^\lambda) \tag{72}$$

vi) Wir können nun - so die Beweisidee - im Prinzip das Argument für die übrigen $(k-1)$ Eigenwerte wiederholen, indem wir F in jedem Schritt auf den neu enstandenen Unterraum bijektiven Verhaltens beschränken, bis wir V vollständig in verallgemeinerte Eigenräume direkt zerlegt haben.

Damit haben wir alle notwendigen Teilschritte durchlaufen und können das Ergebnis zusammenfassen in dem Satz über die **Jordanzerlegung** des dem Endomorphismus zugrundeliegenden Vektorraums V. Vorbereitend erinnern wir daran, daß das Minimalpolynom nur dann wie das charakteristische faktorisiert, wenn A diagonalisierbar ist.

Satz 22. *Sei $F \in End(V)$ mit $\dim(V) < \infty$. Gilt nun zusätzlich*

$$m_A(\lambda) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \quad \wedge \quad p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\nu_i}$$

mit paarweise verschiedenen λ_i, dann folgt:

a) Existenz einer F-invarianten Fahne:

$$F(\ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{\nu_i}]) \subseteq \ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{\nu_i}] \qquad (73)$$
$$\textit{mit } \dim(\ker(F - \lambda_i \mathbf{1})) = \nu_i$$

b) Hauptraumzerlegung:

$$V = \oplus_{i=1}^k \ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{\nu_i}] =: \oplus_{i=1}^k Hau_i$$

c) $F - \lambda \mathbf{1}$ ist ν_i-stufig nilpotent auf $\ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{\nu_i}]$, d.h.

$$(F_{|Hau_i} - \lambda \mathbf{1})^{\nu_i} = 0 \qquad (74)$$

Zusätzlich zu (72) gibt es noch die Fakorisierung des Minimalpolynoms (71), die wir für eine verbesserte Normalform noch nicht ausgenutzt haben. Das wollen wir jetzt tun und erwarten so etwas wie eine Feinstruktur in der Matrix, die das Verhalten der Selbstabbildung auf Unterräumen von Haupträumen noch einmal unterscheidet.

7.3.6 Jordansche Normalform

Die Jordanzerlegung macht eine Aussage über das Verhalten einer Selbstabbildung auf speziellen, disjunkten Unterräumen, den Haupträumen, unter der Bedingung, daß das Minimalpolynom faktorisiert. Doch diese Information allein löst unser Identitätsproblem in Form einer verbesserten Normalform trigonalisierbarer Matrizen noch nicht. Dafür müssen wir noch etwas arbeiten:

Der nächste Satz besagt, daß es für nilpotentes F immer einen Unterraum $U \subseteq V$ gibt, auf dem $F_{|U}$ eine darstellende Matrix der Form (65) hat.

Lemma 14. *:*
Sei $F \in End(V)$ mit $\dim(V) < \infty$ mit $\exists n : F^n \equiv 0$ und $F^{n-1} \not\equiv 0$. Dann gilt:

i) Die Vektoren

$$v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v) \qquad (75)$$

sind linear unabhängig.

ii) Für $W := \{v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)\}$ mit W^c als direktem Kompelment gilt: $V = W \oplus W^c$ sowie $F(W^c) \subseteq W^c$.

Die behauptete lineare Unabhängigkeit können wir recht schnell einsehen:

i) $\{v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)\}$ bilden eine Basis der Größe n genau dann, wenn für beliebige Koeffizienten das einzige $p(x) \in \mathcal{P}_{n-1}$ mit $p(F) = 0$ das Nullpolynom $p(x) \equiv o$ ist. Nach Voraussetzung ist gerade $F^n \equiv 0$ und $F^{n-1} \not\equiv 0$. □

ii) Die Existenz der Komplemente leuchtet unmittelbar ein. Sie wird durch einen Induktionsbeweis gesichert und dieser wird am besten in [9] nachgeschlagen.

Bemerkung 25. *Aus (73) und (75) folgt, daß*

$$\mathcal{K} := span_K\{v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v)\}$$

ein F-invarianter Unterraum ist, den man in der Numerischen Linearen Algebra als **Krylow-Unterraum** *bezeichnet. Solche Räume spielen beim Lösen linearer Gleichungssysteme wie sie auch bei der Lösung partieller Differentialgleichungen eine Rolle vorkommen, eine Rolle.*

Das letzte Lemma genügt, um die Jordansche Normalform zu erzeugen. Sei dafür

$$V_i = \ker[(F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i}]$$

Dann ist nach dem Satz über die Jordanzerlegung das Verhalten von F auf V_i beschrieben durch

$$(F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i} \equiv 0 \quad \wedge \quad (F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i - 1} \not\equiv 0$$

Für $v \neq 0$ sei nun

$$W := \langle v, (F - \lambda_i \mathbf{1})(v), \ldots, (F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i - 1}(v) \rangle$$

Dann nimmt die Matrix A von F auf W bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} := \{v, (F - \lambda_i \mathbf{1})(v), \ldots, (F - \lambda_i \mathbf{1})^{m_i - 1}(v)\}$$

klarerweise die Gestalt eines Jordankästchens an.

Definition 36. *Ein Jordankästchen $J_l \in \mathbb{C}^{k \times k}$ hat die Gestalt*

$$J_l = \begin{pmatrix} \lambda_l & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda_l \end{pmatrix} = D_l + N_l$$

und nichts spricht apriori dagegen, daß ein Jordankästchen die Größe $k = 1$ hat, so daß der nilpotente Anteil verschwindet.

Nach dem letzten Lemma gibt es zu W ein F-variantes Komplement $W^c \subset V_i$,so daß man dasselbe Argument noch einmal anwenden kann: Auf W^c gilt wieder $(F - \lambda_i \mathbf{1})^t \equiv 0$ mit $t \leq m_i$. Die Matrix auf diesem Unterraum ist wieder ein Jordankästchen zum gleichen Eigenwert. Im Fall $t = 1$ hat das Jordankästchen die Gestalt λ_i.

Damit hat wir die vermutete Feinstruktur gefunden und können allgemein die Jordansche Normalform J definieren durch:

$$
J = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{matrix}} & & 0 \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{matrix}} & \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix} \tag{76}
$$

(76) zeigt einen aus zwei (im Einzelfall verschieden großen) **Jordankästchen** J_i zusammengesetzten **Jordanblock** zum selben Eigenwert λ_i. Ein Jordanblock kann in mehrere mehrere Jordankästchen zerfallen, es muß aber nicht so sein. Eine Matrix, die nur aus Jordanblöcken besteht, ist von **Jordan-Normalform** J von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Wir formulieren daher:

Satz 23. *Sei $F \in End(V)$ und V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann faktorisiert das charakteristische Polynom der darstellenden Matrix A vollständig und es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ bzgl. der A Jordan Normalform annimmt.*

Beispiele: Nur die ersten beiden Matrizen sind von Jordan Normalform:

$$
A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

Die Jordansche Normalform J einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ wird zusätzlich charakterisiert durch die Merkmale:

i) Die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ_i ist die geometrische Vielfachheit $\mu(\lambda_i, F)$.

ii) Der Rang des ersten und größten Jordankästches zum Eigenwert λ_i ist die algebraische Vielfachheit m_i mit Bezug auf $m_F(F)$. Dies ist die Dimension des normalen Eigenraums.

iii) Die Summe der Ränge der Jordankästchen, d.h. die Größe des Jordanblocks zum Eigenwert λ ist die algebraische Vielfachheit $\nu(\lambda, F)$ mit Bezug auf $p_A(\lambda)$, d.h.

$$\sum k_\lambda = \nu(\lambda, F)$$

Dies ist nichts anderes als (72), d.h. die Dimension des Hauptraumes.

Die Jordansche Normalform ist eindeutig bis auf Vertauschen der Jordanblöcke und der Jordankästchen eines Jordanblocks untereinander, da dies nur einem Umnummerieren der Basis von V entspricht.

7.3.7 Ein Beispiel

Unsere Aufgabe lautet nun die Jordan Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

zu berechnen. Nach dem bisher Gesagten ergibt sich folgender Lösungsweg:

1. Berechnung von $p_A(\lambda)$ liefert das Spektrum und $\nu(\lambda_i, F)$. Die Besetzung der Hauptdiagonalen bestimmt das Verhalten des bijektiven Anteils des Endomorphismus:

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3(\lambda - 2)^2$$

2. Berechnung der Jordanschen Normalform von A:

   a) $\nu(\lambda_i, F))$ liefert die Dimension des Hauptraums, d.h.

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2: &\quad \dim[Hau(\lambda_1, F)] = 2 \\ \lambda_2 = 1: &\quad \dim[Hau(\lambda_2, F)] = 3 \end{aligned}$$

   b) Berechnung der Basen der Haupträume durch Lösen der Gleichungssysteme $\ker(A - \lambda_i \mathbf{1})^i v = 0$ mit $1 \le i \le \nu(\lambda_i, F))$ für jeden Eigenwert:

$$\begin{aligned} Eig(\lambda_1, F) = \ker[(A - \lambda_1\mathbf{1})^1] &= (14, 4, 2, 1, 0)^T =: u_1 \\ \ker[(A - \lambda_1\mathbf{1})^2] &= \langle u_1^T, (-36, -8, -2, 0, -1)^T\rangle =: \langle u_1^T, u_2^T\rangle \\ Eig(\lambda_2, F) = \ker[(A - \lambda_2\mathbf{1})^1] &= (1, 0, 0, 0, 0)^T =: u_3^T \\ \ker[(A - \lambda_2\mathbf{1})^2] &= \langle u_3^T, (0, 1, 0, 0, 0)^T\rangle =: \langle u_3^T, u_4^T\rangle \\ \ker[(A - \lambda_2\mathbf{1})^3] &= \langle u_3^T, u_4^T, (0, 0, 1, 0, 0)^T\rangle =: \langle u_3^T, u_4^T, u_5^T\rangle \end{aligned}$$

   c) Damit kann man bereits die Jordansche Normalform erschließen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   mit den Haupträumen

$$\begin{aligned} Hau(\lambda_2, F) &= span_K\{(A - \lambda_2\mathbf{1})^3 u_5\} \oplus span_K\{(A - \lambda_2\mathbf{1})^2 u_5\} \oplus span_K\{(A - \lambda_2\mathbf{1}) u_5\} \\ &=: W_3 \oplus W_2 \oplus W_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Hau(\lambda_1, F) &= span_K\{(A - \lambda_2\mathbf{1})^2 u_2\} \oplus span_K\{(A - \lambda_2\mathbf{1})^1 u_2\} \\ &=: Z_2 \oplus Z_1 \end{aligned}$$

3. Es bleibt die Angabe einer sog. **Jordanbasis** T eines Jordanblocks zu λ_i für alle i für den nilpotenten Anteil des Endomorphismus auf dem jeweiligen Hauptraum, d.h. für $(F - \lambda_i \mathbf{1})_{|Hau(\lambda_i,F)}$:

$$T = \begin{pmatrix} W_2 & W_1 & W_3 & Z_1 & Z_2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad TAT^{-1} = J$$

7.4 Singulärwertzerlegung

Dabei handelt es sich um die Verallgemeinerung des Normalformproblems auf nicht-quadratische, nicht-symmetrische Matrizen. Sie wird in der Numerik sehr oft gebraucht.

Definition 37. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Gilt dann für orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sowie die Diagonalmatrix $\Sigma = \left(\sigma_{ij} \cdot \delta_{ij}\right)_i$*

$$A = U\Sigma V^T \tag{77}$$

dann heißt (77) die Singulärwertzerlegung (SVD) von A. δ_{ij} ist das Kroneckersymbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow \quad i \neq j \\ 1 & \Leftrightarrow \quad i = j \end{cases}$$

Gibt es eine SVD von A im Rellen, dann gibt es sie erst recht für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Definition 38. *:*
Es seien in einer SVD von A die Hauptdiagonalelemente von Σ nicht negativ. Dann heißen die σ_i in Σ Singulärwerte von A.

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Singulärwerten und den Eigenwerten einer Matrix?

Lemma 15. *Es existiere von $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$. Da U und V orthogonale Matrizen sind, folgt:*

a) $A^TA = (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T = (\Sigma V^T)^T U^T U \Sigma V^T = V\Sigma^2 V^T$

b) $AA^T = U\Sigma V^T (U\Sigma V^T)^T = U\Sigma V^T (\Sigma V^T)^T U^T = U\Sigma^2 U^T$

M.a.W.: A und A^TA haben in Bezug auf ihr Normalformproblem dieselben Transformationsmatrizen und die positiven Quadrate der Singulärwerte σ von A sind die Eigenwerte λ von A^TA bzw. von AA^T, d.h.

$$+\sqrt{\lambda}_i = \sigma_i$$

Auch die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte stimmen überein. Denn:

i) Sei $v \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda > 0$ von A^TA. Dann folgt:

$$A^TAv = \lambda v \quad \Rightarrow \quad Av \neq 0$$
$$\Rightarrow \quad AA^TAv = \lambda Av \quad \Rightarrow \tag{78}$$

ii) Es sei durch $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis eines beliebig vorgegebenen Eigenraums von $A^T A$ zum Eigenwert $\lambda > 0$ gegeben. Da wegen (78) Av Eigenvektor ist zum Eigenwert $\lambda > 0$ von AA^T

$$\Rightarrow \quad (Av_i)^T (Av_j) = v_i^T A^T A v_j = v_i^T \lambda v_j = \lambda \delta_{ij}$$

und orthogonale Vektoren sind linear unabhängig. Folglich ist die Dimension eines Eigenraum zu AA^T zu $\lambda > 0$ mindestens so groß, wie die zu $A^T A$.

iii) Die andere Inklusionsrichtung erhält man, indem man die Argumentation in umgekehrter Richtung durchläuft, was man aus Symmetriegründen immer machen kann. □

Ist daher eine Matrix A diagonalisierbar, so stimmen die Singulärwerte mit den Eigenwerten der Matrix überein.

7.4.1 Existenz der Zerlegung

Satz 24. *Jedes $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ besitzt genau eine Singulärwertzerlegung. (SVD)*

Denn seien $\lambda_1 \geq \ldots > \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_m$ die Eigenwerte von $A^T A$ und $rang(A) = r$. Wieder legen wir durch $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren zu $A^T A$ fest, was wir - wie im Anhang gezeigt - immer tun dürfen, da $A^T A$ symmetrisch ist.

i) Dann ist durch die Menge der $u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i$ ein Orthonormalsystem von AA^T zu den o.g. Eigenwerten gegeben, da

$$\begin{aligned} AA^T u_i &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} AA^T A v_i = \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i \\ u_i^T u_j &= \tfrac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} (Av_i)^T (Av_j) = \sqrt{\tfrac{\lambda_j}{\lambda_i}} v_i^T v_j = \sqrt{\tfrac{\lambda_j}{\lambda_i}} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Dieses Orthonormalsystem kann aufgrund des Basisergänzungssatzes zu einer Orthonormalbasis der Matrix AA^T ergänzt werden kann.

ii) Wir setzen nun

$$V := \langle v_1, \ldots, v_m \rangle \quad U := \langle u_1 \ldots, u_n \rangle \quad \sigma_i := \sqrt{\lambda_i}$$

Dann folgt die spaltenweise Darstellung der SVD

$$Av_i = \sigma_i u_i$$

iii) Damit ist Existenz der Singulärwertzerlegung nachgewiesen, falls wir zeigen können, daß

$$rang(A) = rang(A^T) = rang(AA^T) = rang(A^T A)$$

Das erste und dritte Gleichzeitszeichen ist eine Folge der Tatsache, daß

$$Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A)$$

Für das zweite Gleichheitszeichen argumentieren wir mit der Dimensionsformel

$$\begin{aligned} rang(A) &= m - \dim[Ker(A)] \\ &= rang(AA^T) + \dim[Ker(A^TA)] - \dim[Ker(A)] \end{aligned}$$

und wollen daher zeigen, daß

$$\dim[Ker(A^TA)] = \dim[Ker(A)] \Leftrightarrow$$
$$Ker(A) \supseteq Ker(A^TA) \quad \wedge \quad Ker(A) \subseteq Ker(A^TA)$$

Dafür läßt sich nun geltend machen, daß trivialerweise $Ker(A) \subseteq Ker(A^TA)$ gilt und wegen

$$A^TAv = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = v^TA^TAv = \|Av\|_2^2 \quad \Rightarrow \quad Av = 0$$

was gerade $Ker(A) \supseteq Ker(A^TA)$ bedeutet. $\square$

Bemerkung 26. *:*
Wegen einer möglichen Vielfachheit der Eigenwerte von AA^T müssen die Transformationsmatrizen im Gegensatz zu Σ nicht eindeutig sein.

Eine zentrale Anwendung der SVD tritt auf bei der numerischen Lösung von linearen Ausgleichsproblemen. Das wollen wir im nächsten Absschnitt untersuchen.

7.4.2 Interessante Eigenschaften der SVD

Tragen wir zunächst Nützliches über die Singulärwertzerlegung zusammen:

1) Sei rang(A) = rang($\mathbf{\Sigma}$) = r mit $1 \leq r \leq m \quad \Rightarrow$

$$rang(A) = \langle u_1, .., u_r \rangle \text{ und } null(A) = \langle v_{r+1}, .., v_m \rangle$$

Denn eine Multiplikation mit orthogonalen Matrizen ändert den Rang nicht.

2) Kondition einer Matrix, auch im singulären Fall

   – Frobenius-Norm:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{r} \sigma_j}$$

   – 2-Norm:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 = \|\mathbf{\Sigma}\|_2 = \sigma_{max} &= \max_u \tfrac{u_1^TA^TAu}{u_1^Tu} \\ \Rightarrow \quad \|A^{-1}\|_2 &= \tfrac{1}{\sigma_{min}} \\ \Rightarrow \quad cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\| &= \tfrac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \end{aligned}$$

3) Wegen des Determinantenmultiplikationssatz gilt:

$$|det(A)| = |det(\mathbf{U})||det(\mathbf{\Sigma})||det(\mathbf{V}^T)| = |\prod_j^r \sigma_j|$$

4) UU^T und V^TV sind klarerweise Projektoren, d.h. sie erfüllen die Idempotenzbedingung $P^2 = P$. Beweis als Übung.

5) Die Information aus A wird generell bestmöglich wiedergegeben durch eine reduzierte Matrix der Singulärwerte: Wegen (77) hat A auch die Darstellung

$$A_r := \sum_{j=1}^{r} \sigma_j u_j v_j^T$$

Sei nun ν vorgegeben mit $0 \leq \nu \leq r$ und $\sigma_{\nu+1} \neq 0$. Dann ist zum einen

$$\|A - A_\nu\|_2 = \| \sum_{j=\nu+1}^{r} \sigma_j u_j v_j^T \|_2 = \sigma_{\nu+1} \neq 0$$

und zum anderen findet sich keine andere Matrix B über dem Körper von A mit $rang(B) = \nu$, die A ähnlicher wäre als A_ν. Denn in diesem Fall hätte der Kern von B die Dimension $m - \nu$ und das durch $\langle v_1, ..v_{\nu+1}\rangle$ aufgespannte Bild die Dimension $\nu + 1$. Ist aber e ein Einheitsvektor aus dem wegen $m - \nu + nu + 1 > m$ nicht-leeren, gemeinsamen Teilraum, so ist

$$\begin{array}{rcl} \|A - B\|_2^2 & \geq & \|(A - Be\|_2^2 = \|Ae\|_2^2 = \|\Sigma V^T e\|_2^2 \\ & \geq & \sigma_{\nu+1}^2 \|V^T e\|_2^2 = \sigma_{\nu+1}^2 \qquad \square \end{array}$$

Dies ist aufgrund der Äquivalenz von Normen über $\mathbb{R}$ unabhängig von der Wahl der Norm. Die Kondition (79) des Problems verbessert sich, wenn die vernachlässigten Singulärwerte Werte nahe Null sind.

Wir sind nun mit der SVD hinreichend vertraut, um den Zusammenhang mit linearen Ausgleichsproblemen zu untersuchen.

Sei dafür $A = U\Sigma V^T$ eine SVD von A und betrachte ein lineares Ausgleichsproblem bzgl. gegebener Daten b :

$$\begin{array}{rcl} \min\limits_x & = & \|Ax - b\|_2^2 = \|U^T(Ax - b)\|_2^2 \\ & = & \|U^T AVV^T)x - U^T b\|_2^2 = \|\Sigma(V^T x) - U^T b\|_2^2 \\ & = & \big(\Sigma V^T x - U^T b\big)^T \big(\Sigma V^T x - U^T b\big) \\ & = & \big(\Sigma V^T x\big)^2 - 2\Sigma V^T U^T x + \big(U^T b\big)^2 \\ & = & \sum\limits_{j=1}^{r} \big(\sigma_j (V^T x)_j - {u_j}^T b\big)^2 + \sum\limits_{j=r+1}^{m} \big(u_j^T b\big)^2 \end{array}$$

Das zeigt, daß x zugleich die kürzeste Lösung eines linearen Ausgleichsproblems ist genau dann, wenn

$$\begin{array}{rcl} V^T x & = & \big(\dfrac{u_1^T b}{\sigma_1}, -, \dfrac{u_m^T b}{\sigma_m}\big) \quad \Leftrightarrow \\ x & = & V\Sigma^{-1}(U^T b) \quad \Leftrightarrow \\ x & = & \sum\limits_{j=1}^{r} \dfrac{u_j^T b}{\sigma_i} v_j + \sum\limits_{r+1=j}^{m} \dfrac{u_j^T b}{\sigma_i} v_j \end{array}$$

denn genau in diesem Fall verschwindet der erste Summand in (79). Die kürzeste Lösung wird zur Minimierung des Residuums aber gerade gesucht. □

7.5 summary

Bei der Normalformproblematik muß man verschiedene Fälle von Äquivalenzrelationen auseinander halten:

1. Quadratische Matrizen:

Name	Matrix	Normalform	Transformation
Diagonalform	$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	D	$A = UDU^T$
Schurform I	$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \vee \in \mathbb{C}^{n \times n}$	$R = D + N$	$A = URU^H$
Schurform II	$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	H	$A = UHU^T$
Jordanform	$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \vee \in \mathbb{C}^{n \times n}$	$J = D + N$	$A = UJU^T$

2. Nicht-Quadratische Matrizen:

Name	Matrix	Normalform	Transformation
Rangäquivalenz	$A \in \mathbb{R}^{n \times m} \vee \in \mathbb{C}^{n \times n}$	E_r	$A = SE_rT^{-1}$
SVD	$A \in \mathbb{R}^{n \times m} \vee \in \mathbb{C}^{n \times n}$	Σ	$A = U\Sigma V^T$

Darüberhinaus ist jede dieser Transformation von quadratische Matrizen bzw. nicht-quadratische Matrizen durch ihre Invarianten gegenüber dieser Transformation charakterisiert:

Name	Invarianten
Diagonalform	Eigenwerte mit Vielfachheit, $rang(A)$
Schurform I	Eigenwerte mit Vielfachheit, $rang(A)$
Schurform II	$rang(A)$
Jordanform	Eigenwerte mit Vielfachheit, $rang(A)$
Rangäquivalenz	$rang(A)$
SVD	Eigenvektoren, $rang(A)$

8 Anhang

8.1 Der Satz von Cayley-Hamilton

Satz 25. *Sei $F \in End(V)$, V endlich-dimensional und $p_F(\lambda)$ das charakteristische Polynom von F. Dann gilt:*

$$p_F(F) \equiv o$$

Das Einsetzen von F in p_F und $\det(A - x\mathbf{1})$ sind ganz verschiedene Dinge, da $p_F(F) \in End(V)$ und $\det(A - x\mathbf{1}) \in K[x]$. Zum Beweis müssen wir daher einen anderen Weg gehen und nutzen dafür die Tatsache aus, daß wir nur abgebraisch abgeschlossene Körper betrachten. Für einen beliebig vorgegebenen Endomorphismus bedeutet das:

- $p_A(\lambda)$ faktorisiert
- A ist ähnlich zu einer oberen Dreicksmatrix mit den Eigenwerten auf der Hauptdiagonale.

Und da wir für $p_F(F)$ auch die äquivalente Schreibweise

$$p_F(F) = (F - \lambda_1\mathbf{1}) \circ \ldots \circ (F - \lambda_n\mathbf{1}) =: \phi_n(V)$$

angeben können, läßt sich auf der durch den trigonalisierbaren Endomorphismus gegebenen F-invarianten Fahne

$$\{0\} = V_1 \subset \ldots \subset V_n = V =: \mathcal{F}$$

mit der Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $V_n = span_K\{v_1, \ldots, v_i\}$ das Verhalten von F direkt beobachten, wenn wir mittels Induktion über den *grad* n von $p_F(F)$ argumentieren, daß $\phi_i(V_i) = \{0\}$:

i) Induktionsanfang: $n = 1$

$$\text{Sei } v_1 \in V_1 \subset \mathcal{F}: \quad F(v_1) = \lambda v_1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{1} \lambda_i F^(i)(v_1) = \phi_1(v_1) = 0$$

ii) Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für $1 < k \leq (n-1)$.

iii) Sei wieder $v_i \in V_i \subset \mathcal{F}$ beliebig vorgegeben und $i \geq 2$. Dann gibt es ein $w \in V_{i-1} \subset \mathcal{F}$ und $\mu \in \mathbb{C}$ derart, daß für beliebig vorgegebenes $v \in V_i$ gilt $v = w + \mu v_i$. Das bedeutet

$$F(w) - \lambda_i w \in V_{i-1} \quad \text{und} \quad F(v_i) - \lambda_i v_i \in V_{i-1}$$

Nach Induktionsannahme ist damit

$$\begin{aligned} \phi_i(w) &= \phi_{i-1} \circ (F - \lambda_i\mathbf{1})(w) = \phi_{i-1}(F(w) - \lambda_i w) = 0 \\ \phi_i(v_i) &= \phi_{i-1} \circ (F - \lambda_i\mathbf{1})(v_i) = \phi_{i-1}(F(v_i) - \lambda_i v_i) = 0 \\ &\Rightarrow \phi_i(v) = 0 \quad \square \end{aligned}$$

Dieser Satz läßt den tieferen Sinn der Definition einer F-invarianten Fahne erkennen.

8.2 Zusätzliche Diagonalisierbarkeitskriterien

8.2.1 Normale Matrizen

Definition 39. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt normal gdw*

$$AA^H = A^H A$$

Satz 26. *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär diagonalisierbar gdw A normal ist. In diesem Fall gibt es unitäare Matrizen $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ derart, daß*

$$A = UDU^H$$

und D ist eine Diagonalmatrix.

Der Beweis ist unter Ausnutzung der Lösungen der Normalformprobleme schnell gemacht:

Hinrichtung: Sei A zerlegbar.

$$\begin{aligned} A = UDU^H \quad &\Rightarrow \quad AA^H = UDU^H UD^H U^H = U|D|^2 U^H \\ A = UDU^H \quad &\Rightarrow \quad A^H A = UD^H U^H UDH^H = U|D|^2 U^H \end{aligned}$$

Rückrichtung: Sei A normal.
Da $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es von A eine Schur-Zerlegung, d.h.

$$R = U^H AU \quad \Rightarrow \quad R^H R = U^H A^H AU = U^H AA^H U = RR^H$$

Da R normal ist, folgt

$$|\lambda_1|^2 = \left(R^H R\right)_{11} = \left(RR^H\right)_{11} = |\lambda_1|^2 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} |r_{jk}^2|}_{=0}$$

Induktiv sieht man ein, daß dies für alle j gelten muß, so daß R tatsächlich eine Diagonalmatrix ist. $\square$

8.2.2 Symmetrische Matrizen

Definition 40. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt symmetrisch gdw $A^T = A$.*

Wir beweisen zunächst charakteristische Eigenschaften symmetrischer Matrizen:

Lemma 16. *:*
Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und ist λ ein Eigenwert von A, dann gilt $\lambda \in \mathbb{R}$.

Denn man rechnet für zwei Eigenvektoren v_i und v_j zu den nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerten λ_i und λ_j nach:

$$\begin{gathered} \lambda_i\langle v_j, v_i\rangle = \langle v_j, \lambda_i v_i\rangle = \langle v_j, Av_i\rangle \\ = \langle Av_j, v_i\rangle = \langle \lambda_j v_j, v_i\rangle = \bar{\lambda}_j\langle v_j, v_i\rangle \quad \text{so daß} \\ v_i = v_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \bar{\lambda}_i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

denn symmetrische Matrizen induzieren symmetrische Bilinearformen.

Satz 27. *:*
Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind orthogonal.

Denn mit dem letzten Lemma haben wir - einfacher als sonst - sofort:

$$(\lambda_i - \bar{\lambda}_j)\langle v_j, v_i\rangle \quad \Rightarrow \quad v_j \perp v_i$$

Nach unseren bisherigen Diagonalisierbarkeitskriterien kann eine symmetrische Matrix immer auf Diagonalgestalt gebracht werden, falls wir zeigen können:

Satz 28. *Es gibt eine orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A.*

i) Nach dem Basiserängungssatz können wir zu dem Eigenraum jedes Eigenwertes eine orthogonale Basis wählen. (Beweis als Übung)

ii) Da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerte paarweise senkrecht stehen, bekommen wir eine Basis desjenigen Unterraum von $\mathbb{R}^n$, der von allen Eigenvektoren aufgespannt wird.

iii) Es bleibt induktiv zu zeigen, daß dieser Unterraum der gesamte $\mathbb{R}^n$ ist. (Beweis als Übung) $\square$

Wer sich für symmetrische Matrizen interessiert, möge zu den Stichworten 'Hauptachsentransformation' und 'selbstadjungierte Endomorphismen' oder auch 'Quadriken' selbst weiterforschen.

8.3 Matrixexponentielle

8.3.1 Anfangswertprobleme

Gegeben sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \in [-T, T] \subset \mathbb{R}$ sowie $x \in \mathbb{C}^n$. Dann wird ein lineares, autonomes und homogenes Anfangswertproblem gegeben durch die folgende nicht explizit zeitabhängige Differentialgleichung

$$x'(t) = A \cdot x(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Seine Lösung wird beschrieben durch den Fluß $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ mit

$$\Phi^{t,t_0} x_0 = x(t)$$

mit den den Fluß definierenden Eigenschaften

i) $\Phi^{t_0,t_0} x_0 = x_0$

ii) $\Phi^{t,s}\Phi^{s,t_0} x_0 = \Phi^{t,t_0} x_0 = x(t) \quad \forall s, t$

OBdA können wir für das Folgende $t_0 = 0$ setzen.

8.3.2 Wohldefiniertheit

Gegeben seien $A, M \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \in [-T, T] \subset \mathbb{R}$. Dann ist

$$E(A,t) := \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

wegen

$$\|\exp(tA)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^k}{k!} = \exp(t\|A\|) < \infty$$

nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium absolut und gleichmäßig konvergent und daher wohldefiniert.
Da $E(A,t)$ gleichmäßig konvergiert, darf man gliedweise differenzieren. Die entstehende Potenzreihe ist wieder gleichmäßig und absolut konvergent. Folglich darf man die Limesbildung bei dieser Potenzreihe und das Differenzieren ihrer Summanden vertauschen. Das führt auf:

$$E'(A,t) = A\exp(tA)$$

Schließlich ist noch

$$E(A,0) = \exp(0 \cdot A) = \mathbf{1}$$

$\Rightarrow E(A,t)$ löst $x'(t) = Ax_0 \quad x(t_0) = x_0$ und wir können schreiben:

$$E(A,t) \equiv \Phi^t \qquad \square \tag{79}$$

8.3.3 Eigenschaften

Die hier wesentlichen Eigenschaften der Matrixexponentielle sind:

a) Der Phasenfluß ist eine affine Invariante,d.h.

$$\exp(tMAM^{-1}) = M\exp(tA)M^{-1} \quad \forall M \in \mathrm{GL}(n)$$

Denn man rechnet sofort nach:

$$\begin{aligned}(MAM^{-1})^n &= \underbrace{(MAM^{-1})\cdot(MAM^{-1})\cdot\ldots\cdot(MAM^{-1})}_{n} \\ &= MA^nM^{-1} \qquad \square\end{aligned}$$

Diese Eigenschaft zusammen mit (79) erlaubt es, die Informationen aus der Lösung des Normalformproblem zur qualitativen Analyse des Flusses einer Differentialgleichung nutzbar zu machen.

b) Für $\Lambda = \mathrm{Blockdiag}(\Lambda_1, -, \Lambda_k)$ gilt:

$$\exp(t\Lambda) = \mathrm{Blockdiag}(\exp(t\Lambda_1), -, \exp(t\Lambda_k))$$

Beweis als Übung.

c) Das Analogon kennen wir bereits in $\mathbb{R}$:

$$\exp\big(t(A+B)\big) = \exp(tA)\exp(tB) \text{ falls } A \cdot B = B \cdot A$$

Denn man rechnet sofort nach:

$$\begin{gathered}
\phi(x) := \exp(xA)\exp(-xB)\exp(-x(A+B)) \text{ mit } \phi(0) = \mathbf{1} \\
\Rightarrow \tfrac{d}{dx}\phi(x) = A\phi(x) + B\phi(x) - (A+B)\phi(x) = 0 \\
\Rightarrow \phi(x) = \mathbf{1} \quad \forall x \\
\text{Wähle } x = 1. \text{ Dann folgt:} \\
\exp(A+B) = \exp(-(A+B))^{-1} = \exp(A)\exp(B) \quad \Rightarrow \text{ Beh.} \qquad \square
\end{gathered}$$

d) Erinnert man sich an die Interpretation der Determinante als Maß für die Volumenverzerrung durch eine lineare Abbildung, dann ist interessant:

$$\det(E(A,t)) = \exp(t \cdot Tr(A))$$

mit $Tr(A)$ als Summe der Singulärwerte von A. (Beweis als Übung)

Literatur

[1] Behrends, E.: Introduction to Markov Chains; Braunschweig 2000
(enthält alles, was man braucht)

[2] Blobel, V, & Lohrmann, E.: Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse; Braunschweig 2000
(schnell lesbare, kompakte Einführung)

[3] Fischer, G. : Lineare Algebra; Braunschweig 2000
(Standardlehrbuch, vordiplomstauglich)

[4] Golub, G. H.& van Loan, C.F.: Matrix Computations, 3rd ed. 1996
(ausgezeichnetes und sehr reichhaltiges Buch für praktisches Zwecke)

[5] Hämmerlin, G. & Hoffmann, K. H.: Numerische Mathematik; Springer 1992
(nicht mehr ganz zeitgemäß, aber solide, mit klarer Argumentation)

[6] Krengel, U.: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, Braunschweig 2000
(vielleicht das beste deutschsprachige Buch für dieses Gebiet)

[7] Koecher, M.: Lineare Algebra und analytische Geometrie, Heidelberg 1997
(nicht so ganz konventionell, aber sehr intuitive Argumentation)

[8] Stoer, J.: Numerische Mathematik 1, 1999
(Schönes, systematisches Buch)

[9] Stroth, G. & Bau, D.: Lineare Algebra, 1995
(Schönes, systematisches Buch)

[10] Trefethen, L.N. & Bau, D.: Numerical Linear Algebra, SIAM 1997
(Das Beste was es zur Zeit zur numerischen Linearen Algebra gibt.)

[11] Wille, D..: Repetitorium der Linearen Algebra, Teil 1+2, 2001
(Enthält viele durchgerechnete Übungsaufgaben zur linearen Algebra.)